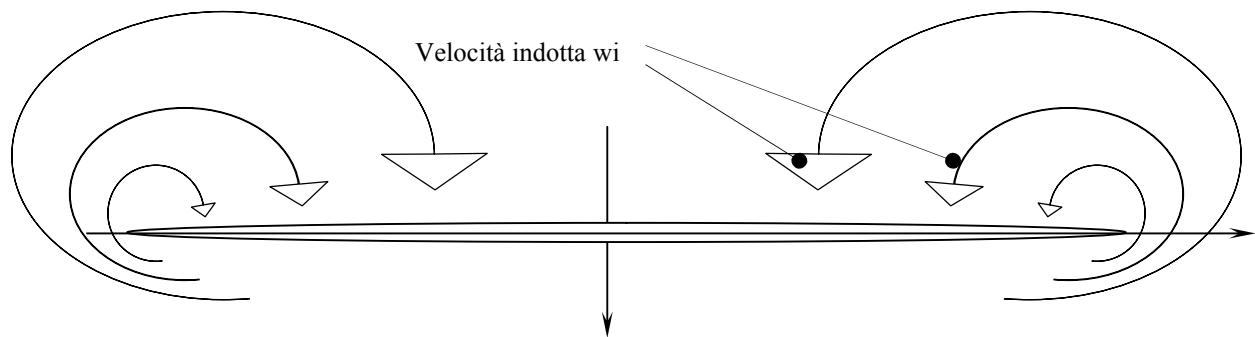


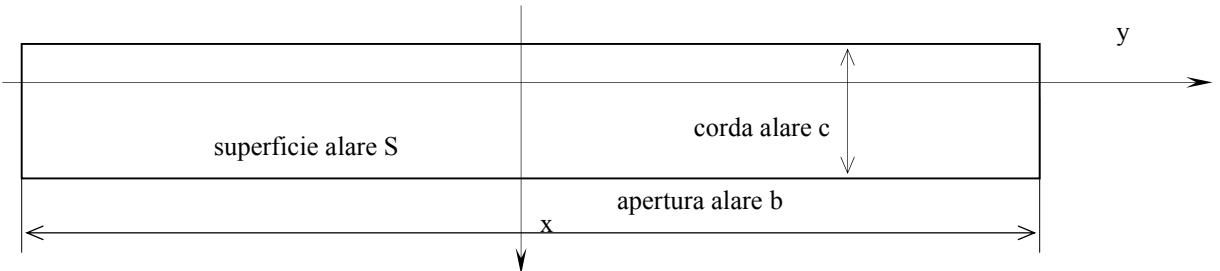
## STUDIO DELLA PIANTA ALARE

consideriamo un'ala vista posteriormente e analizziamo il campo di moto dell'aria attorno ad essa. La velocità relativa fra il fluido e l'ala, determina una pressione sul ventre più alta di quella sul dorso che a sua volta è più bassa di quella del fluido indisturbato, il fluido, tende a muoversi dalle zone di più alta pressione verso le zone di più bassa pressione. Le particelle di fluido vengono ad assumere una componente di velocità lungo l'apertura alare che le portano a scavalcare le estremità alari dal ventre verso il dorso, le particelle poi si abbattono nuovamente sull'ala dal dorso verso il ventre (gli inglesi lo chiamano downwash cioè lavata verso il basso) noi lo chiamiamo velocità indotta.



Per lo studio della forma in pianta dell'ala sono stati individuati dei parametri geometrici

Vediamo un'ala rettangolare in pianta:



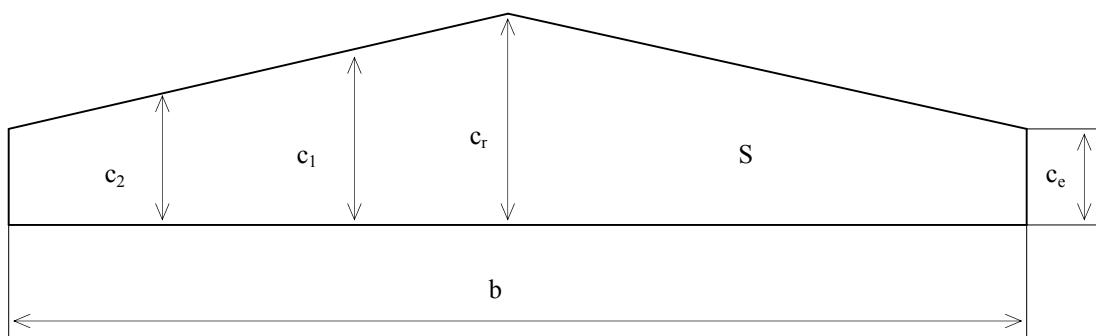
**La superficie alare S** è l'area della figura geometrica che rappresenta la forma in pianta dell'ala.

**L'apertura alare** è la larghezza dell'ala si indica con la lettera b

**La corda alare** è la corda del profilo in un punto dell'ala si indica con la lettera c.

Se l'ala è rettangolare le corde sono tutte uguali, se l'ala non è rettangolare, il parametro geometrico che ci interessa è la **corda media**  $c_m$ . La corda media è la somma di tutte le corde dell'ala diviso il numero di corde. Per non eseguire questo lungo calcolo, si dimostra matematicamente che la corda media è la corda di un'ala rettangolare che ha la stessa apertura e la stessa superficie dell'ala di forma qualsiasi che stiamo considerando.

Dall'area del rettangolo si ha  $S = b \cdot c_m$ , quindi si può calcolare  $c_m = S/b$



$c_r$  è detta corda alla radice alare,  $c_e$  è detta corda all'estremità alare.

Se l'ala è trapezoidale, detta anche rastremata come quella in alto, la corda media si può anche calcolare come corda media fra  $c_r$  e  $c_e$ , cioè come  $c_m = (c_r + c_e)/2$

Si definisce **allungamento alare**, e con la notazione italiana si indica con la lettera greca  $\lambda$  , (lambda), il rapporto fra l'apertura alare e la corda media:

$$\lambda \equiv \frac{b}{c_m}$$

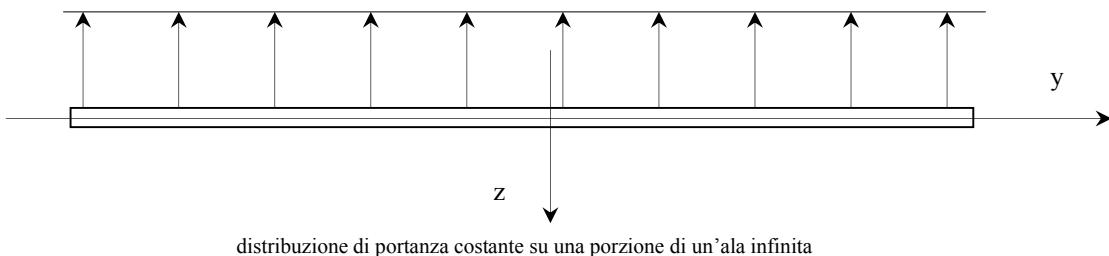
In inglese si chiama “aspect ratio” cioè rapporto d'aspetto e si indica con AR  
considerando l'espressione della corda media vista prima la relazione fra allungamento, apertura, e superficie alare è:

$$\lambda \equiv \frac{b^2}{S}$$

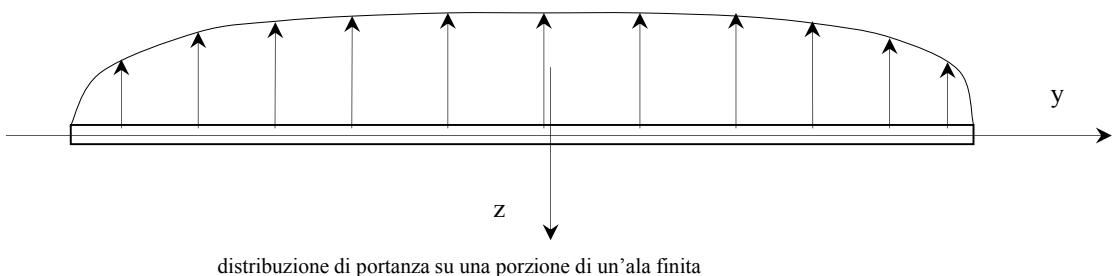
Ricordiamo che allungamento elevato vuol dire ala di grande apertura rispetto alla corda.

Consideriamo una porzione di un'ala infinita, vista posteriormente, porzione che abbia la stessa apertura di un'ala rettangolare di apertura finita. Questa porzione di ala infinita, non ha delle estremità alari, le sue estremità sono chiuse dalle parti che vanno all'infinito, quindi l'aria non può scavalcare per creare il campo di moto tridimensionale prima descritto. Il campo di moto attorno ad essa è bidimensionale

Pertanto, in un'ala infinita la distribuzione di portanza è costante lungo l'apertura.



Sull'ala di apertura finita, non può esistere una differenza di pressione fra dorso e ventre nei profili alle estremità alari, questo perché non c'è più una superficie solida che sopporta la differenza di pressione. Pertanto in un'ala di apertura finita la portanza deve essere zero alle estremità alari e risulterà massima al centro.



A parità di incidenza delle due ali, solo i profili centrali manterranno la stessa portanza, i profili laterali dell'ala finita avranno tanto meno portanza quanto più sono vicini alle estremità alari. Per questo motivo, la portanza complessiva dell'ala di apertura finita è minore di quella dell'ala infinita.

Nell'ala infinita esistono solo la resistenza dovuta all'attrito ed alla scia, entrambe dipendenti dallo strato limite. Nell'ala di apertura finita, la velocità indotta modifica la distribuzione di velocità e pressione sui profili alari in modo da generare una resistenza di pressione aggiuntiva che non dipende dallo strato limite. Questo tipo di resistenza si chiama "**resistenza indotta**".

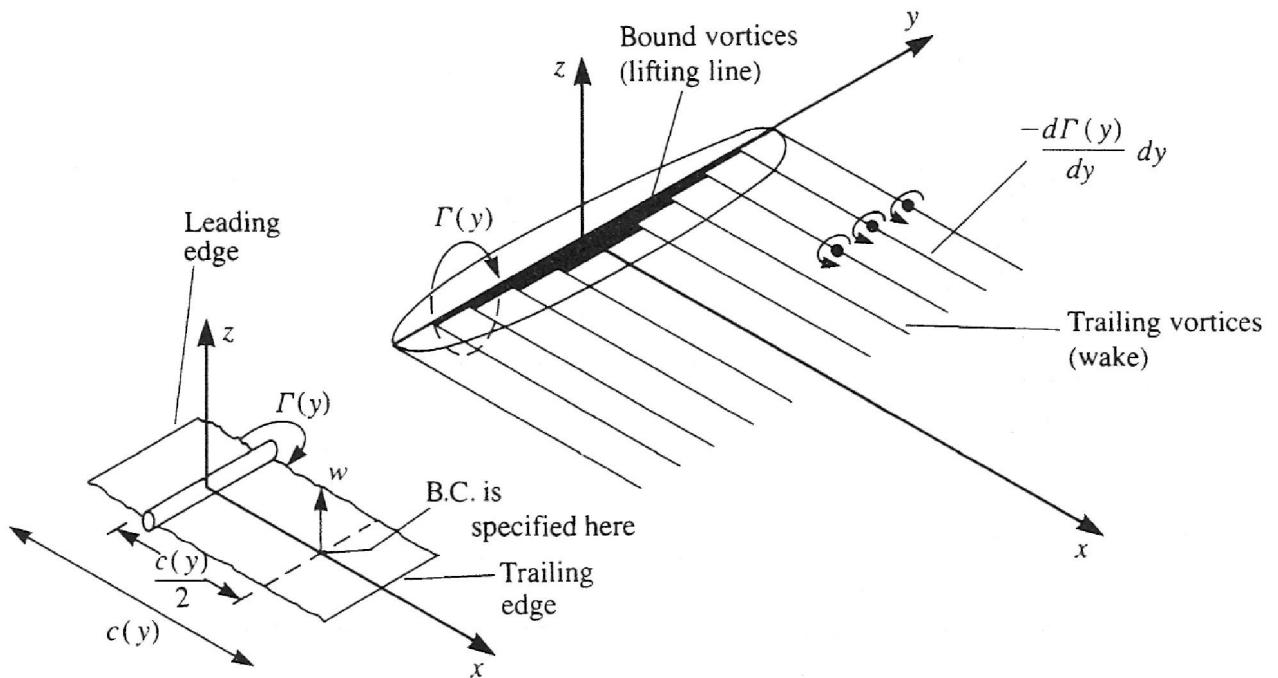
Quindi, a parità di incidenza, la resistenza complessiva dell'ala di apertura finita è maggiore di quella dell'ala infinita

In conclusione, il campo di moto tridimensionale che si instaura attorno ad un'ala di apertura finita fa in modo che a parità di incidenza, rispetto ad un'ala infinita, la portanza diminuisce e la resistenza aumenta.

Il ricercatore che negli anni 1920 giunse ad un modello di calcolo valido per questo fenomeno si chiamava Ludwig Prandtl e lavorava in Germania all'università di Gottinga. Il modello di calcolo va sotto il nome di "Schema di Prandtl".

## SCHEMA DI PRANDTL PER LO STUDIO DELLA PIANTA ALARE

Lo schema è basato su vortici tridimensionali, cioè sono fili di lunghezza infinita che emettono un campo di velocità circonferenziale e disposti sull'ala come nella figura in basso.



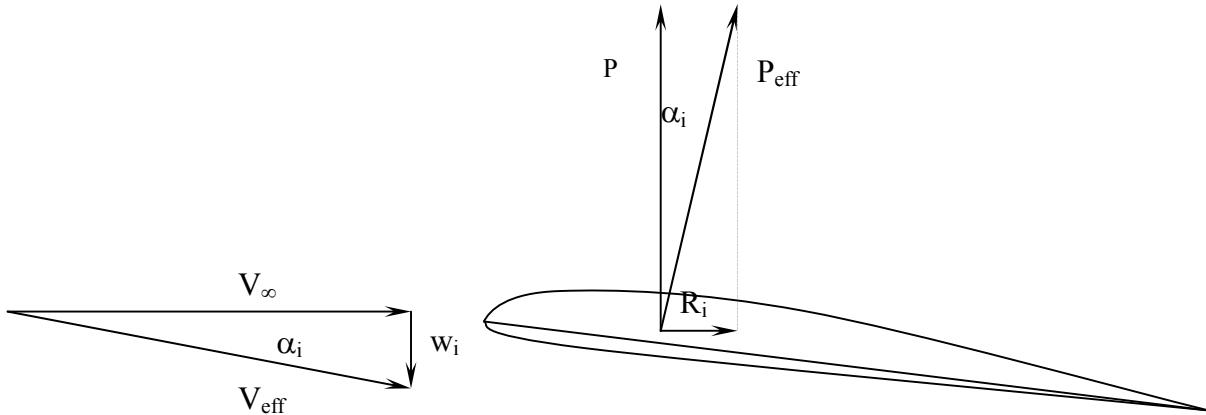
**Figure 8.2** Lifting-line model consisting of horseshoe vortices. The bound vortex segment of all vortices is placed on the  $y$  axis.

I vortici sono distribuiti in maniera continua non sono discreti come sembra nella figura. La parte parallela all'ala giace tutta concentrata sulla linea dei quarti anteriori. La disposizione dei vortici, limita questo schema a rappresentare ali di allungamento pari ad almeno 6 e con piccolo angolo di freccia, diciamo non superiore a  $15^\circ$ .

La parte di vortici aderente all'ala schematizza la vorticità che fornisce portanza.

La parte di vortici di lunghezza infinita che si protende dietro l'ala schematizza la velocità indotta.

Per spiegare e per poter calcolare la resistenza indotta, lo schema prevede una rappresentazione semplificata della realtà che tuttavia porta a risultati accettabili: Prandtl introdusse la semplificazione di assumere che la velocità indotta sia costante lungo la corda di ciascun profilo dell'ala. La velocità indotta, sommandosi vettorialmente con la velocità indisturbata ruota la velocità relativa fra il fluido e l'ala, ciò porta ad avere una componente della portanza in direzione del moto dell'aeroplano diversa da zero, è quindi una resistenza del tutto indipendente dallo strato limite. È una resistenza di pressione dovuta alla tridimensionalità del fenomeno aerodinamico.



$V_\infty$  è la velocità indisturbata, la sua direzione è quella del moto dell'aeroplano.

$w_i$  è velocità indotta dal sistema vorticoso intorno all'ala.

$V_\infty$  e  $w_i$  si sommano vettorialmente, dando come risultante una velocità relativa effettiva fra fluido ed ala che si instaura localmente intorno all'ala,  $V_{\text{eff}}$ .

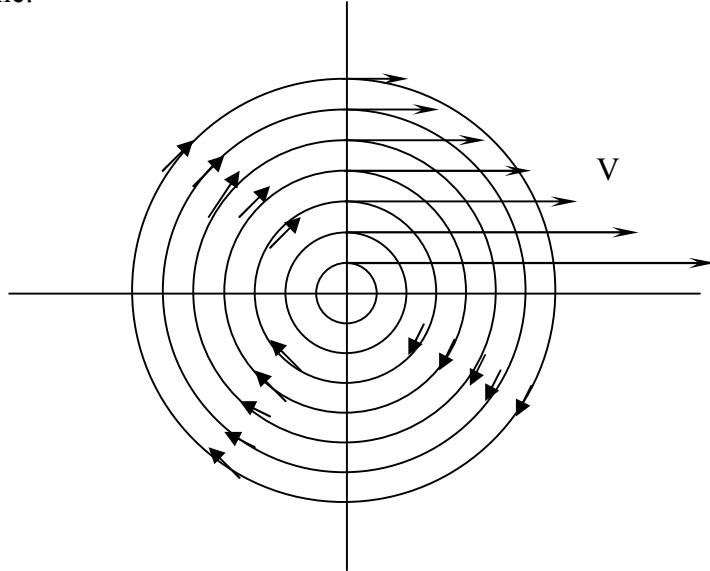
L'angolo fra la  $V_\infty$  e la  $V_{\text{eff}}$ , indicato con  $\alpha_i$ , si chiama "**incidenza indotta**". Questo angolo si sottrae all'incidenza geometrica facendo diminuire l'incidenza effettiva, cioè l'angolo fra la corda e la velocità effettiva.

Se la velocità effettiva relativa fra fluido e ala fosse  $V_\infty$ , la portanza sarebbe il vettore  $P$  perpendicolare alla suddetta velocità, ma la velocità effettiva  $V_{\text{eff}}$  è inclinata dell'angolo di incidenza indotta  $\alpha_i$ , pertanto, anche la portanza effettiva  $P_{\text{eff}}$  è inclinata di  $\alpha_i$  rispetto a  $P$ .  $P_{\text{eff}}$  è perpendicolare a  $V_{\text{eff}}$ .

La  $P_{\text{eff}}$ , non è perpendicolare alla direzione del moto, la sua componente lungo la direzione del moto è una forza che si oppone all'avanzamento dell'aeroplano, è quindi una resistenza al moto. Queste resistenze si chiama resistenza indotta  $R_i$  ed è indipendente dallo strato limite, è una componente della portanza la quale è essenzialmente una forza di pressione, quindi anche la resistenza indotta è una forza di pressione.

Vediamo perché la parte dei vortici concentrata sul quarto anteriore dell'ala è adatta a rappresentare la portanza dell'ala:

Il vortice è un filo, in questo caso è perpendicolare al foglio, che emette velocità tangenziale a circonferenze concentriche.

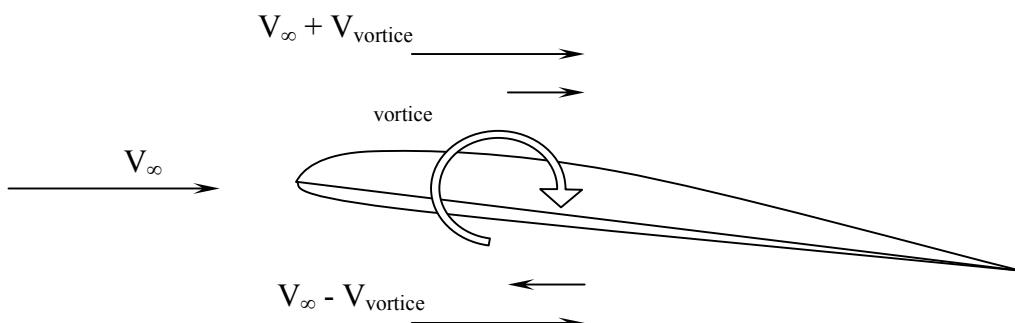


Il modulo della velocità non è costante all'aumentare della distanza dal centro. Nel centro, la velocità è matematicamente infinita, man mano che ci si allontana dal centro la velocità diminuisce con una certa espressione matematica, a distanza infinita dal centro, la velocità tende a zero.  
L'espressione con cui la velocità varia in funzione della posizione è:

$$V = \gamma / (2 \pi r)$$

$\gamma$  è l'intensità del vortice

$r$  è la distanza dal centro del punto in cui si vuole calcolare la velocità.  $r$  può essere espresso in funzione delle coordinate  $x, y$  del punto considerato.



Sappiamo che il profilo alare influenza la velocità del fluido in modo che sul dorso sia maggiore e sul ventre sia minore. Per il teorema di Bernoulli, sul dorso la pressione è minore e sul ventre è maggiore della pressione all'infinito. Il campo del vortice, sommato alla  $V_\infty$ , fa proprio questo, aumenta la velocità sul dorso e la diminuisce sul ventre. Quindi il vortice è adatto a rappresentare la portanza alare.

A questo punto evidenziamo un aspetto importante dello schema di Prandtl:

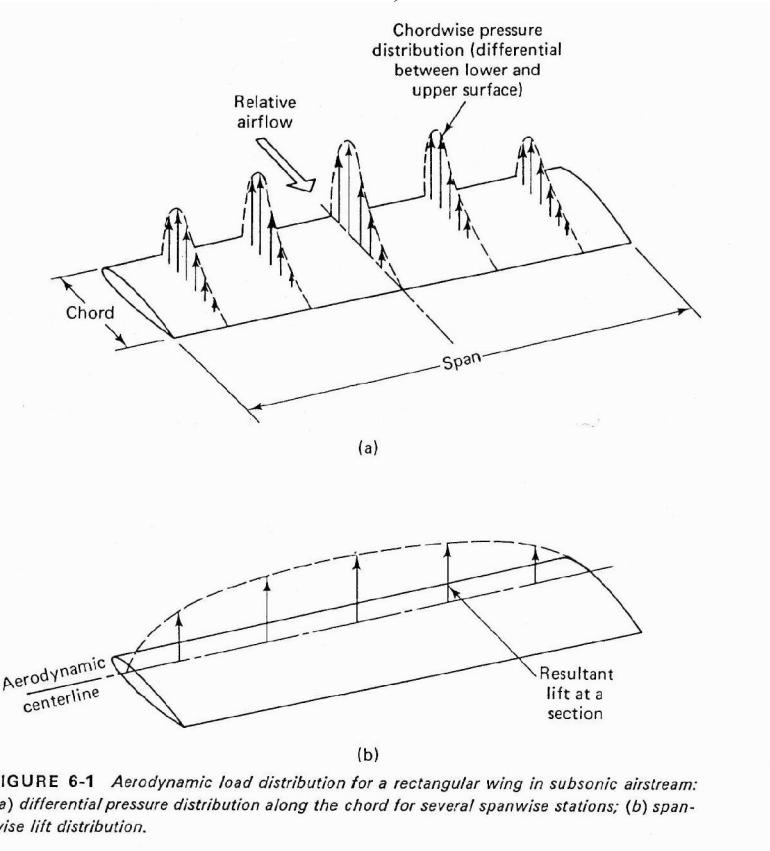
E' stato detto in altre spiegazioni che la distribuzione di velocità ed i coefficienti di portanza, resistenza e momento calcolati o misurati in galleria su un profilo alare (cioè su un'ala che ha per profilo il profilo dato e apertura infinita, della quale si considera una parte larga uno) non sono uguali a quelli dello stesso profilo quando viene a far parte di un'ala di forma generica, sono quasi uguali, si accetta questa approssimazione per poter concludere qualcosa, per rendere possibile lo sviluppo di un metodo di calcolo.

Come fa lo schema di Prandtl a tenere conto delle variazioni di prestazioni che subisce un profilo alare quando viene a far parte di un'ala di apertura finita? Per capire meglio la domanda, presentiamo un problema: supponiamo di avere un'ala a pianta rettangolare ed a profilo costante lungo l'apertura ed incidenza geometrica  $10^\circ$  ovviamente uguale per tutti i profili. Sappiamo poi che la portanza dei profili, è massima al centro dell'ala e zero alle sue estremità. Ma se il profilo all'estremità ha corda diversa da zero, ed incidenza  $10^\circ$ , come fa la sua portanza ad essere zero? Quale modifica apporta lo schema di Prandtl al profilo alare di estremità rispetto al profilo bidimensionale per fargli azzerare la portanza?

Molto semplice: la risoluzione dell'equazione dello schema fornisce una formuletta che consente di calcolare l'incidenza indotta in ogni posizione lungo l'apertura. Se con questa formuletta si calcola l'incidenza indotta alle estremità alari, per la nostra ala risulterà  $10^\circ$ . Siccome l'incidenza effettiva del profilo è la differenza fra incidenza geometrica ed incidenza indotta, l'incidenza dei profili di estremità risulterà zero, quindi anche la loro portanza è zero. Pertanto la modifica che lo schema apporta ad un profilo quando passa dal caso bidimensionale a quello dell'ala finita è quello di farlo lavorare ad una incidenza pari alla differenza fra l'incidenza del bidimensionale e l'incidenza indotta. L'incidenza indotta è costante lungo la corda e variabile lungo l'apertura. In realtà l'incidenza indotta non esiste è solamente una rappresentazione semplificata della realtà creata per poter eseguire dei calcoli che alla fine danno risultati accettabili.

## RISULTATI DELLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLO SCHEMA DI PRANDTL.

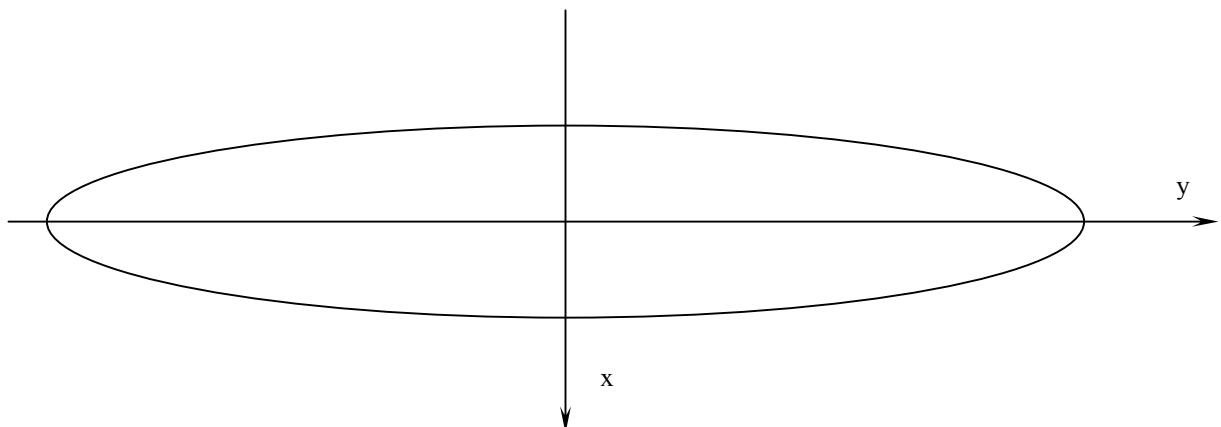
Secondo il modello di calcolo di Prandtl, per avere **minima resistenza indotta** la distribuzione di portanza in direzione dell'apertura alare deve essere ellittica (ha la forma di una mezza ellisse, massima al centro dell'ala zero alle estremità alari.)



**FIGURE 6-1** Aerodynamic load distribution for a rectangular wing in subsonic airstream:  
(a) differential pressure distribution along the chord for several spanwise stations; (b) spanwise lift distribution.

Una configurazione semplice per avere un'ala a portanza ellittica è quella di utilizzare lo stesso profilo per tutte le sezioni alari (profilo costante) e disegnare la pianta alare a forma di ellisse (distribuzione ellittica delle corde)

Ala a pianta ellittica



In un'ala a pianta ellittica, la velocità indotta, e quindi l'incidenza indotta, e quindi il coefficiente di portanza del profilo sono costanti lungo l'apertura alare.

Indicati con:

$C_l$ : coefficiente di portanza del profilo

$C_d$ : coefficiente di resistenza del profilo

$C_L$ : coefficiente di portanza dell'ala

$b$  : apertura alare

$S$  : superficie alare in pianta

$\lambda$ : lambda, allungamento alare

$k$ : è un coefficiente che vale 1 per ala a distribuzione di portanza ellittica e minore di 1 (diciamo 0,8 - 0,9) per ali non ellittiche, dipende dalla loro forma.

Il coefficiente di portanza del profilo in una generica posizione lungo l'apertura dell'ala corrisponde ad una incidenza pari a quella geometrica meno quella indotta nella posizione considerata.

$$C_l = C_l' (\alpha - \alpha_0 - \alpha_i)$$

Tra il coefficiente angolare dell'ala e quella del profilo, è stabilita la seguente relazione:

$$C_L' = \frac{C_l'}{1 + \frac{C_l'}{\pi \lambda}}$$

Se moltiplicano entrambe i membri di questa equazione per l'incidenza dell'ala si ottiene la relazione fra il coefficiente di portanza dell'ala e quello del profilo.

$$C_L = \frac{C_l}{1 + \frac{C_l}{\pi \lambda}}$$

Da questa si vede che diminuendo l'allungamento  $\lambda$  il coefficiente di portanza dell'ala diventa sempre più piccolo rispetto a quello dell'ala infinita che ha lo stesso profilo.

Questa relazione valida solo per ali a pianta ellittica, non svergolate e con profilo costante. In mancanza di altro, la si può applicare a qualsiasi ala ottenendo però un risultato approssimato.

Il coefficiente di resistenza indotta dell'ala vale:

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{k \pi \lambda}$$

Da questa si vede che aumentando l'allungamento  $\lambda$  si ha una diminuzione di resistenza indotta.

Il coefficiente di resistenza totale dell'ala è la somma di quello del profilo e di quella indotta

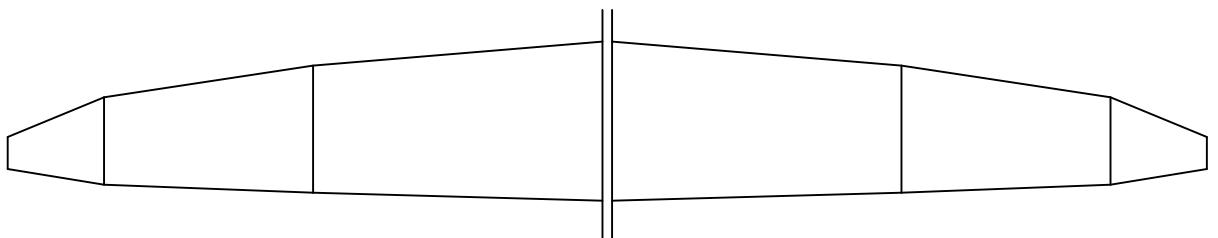
$$C_{D,ala} = C_d + \frac{C_L^2}{k \pi \lambda}$$

Da quanto detto, potrebbe sembrare che l'ala a pianta ellittica sia l'ala di forma migliore; non sempre è così. Vediamo alcune osservazioni che possono esserci utili in fase di progetto.

- 1) L'ala a pianta ellittica presenta maggiori difficoltà costruttive e quindi maggior costo rispetto ad un'ala con una geometria più semplice come potrebbe essere l'ala rettangolare o trapezia. Questo non è un problema insormontabile per le costruzioni modellistiche soprattutto se destinate alle competizioni.
- 2) In un'ala a pianta ellittica la corda del profilo si riduce verso le estremità alari. A parità di altre condizioni, ridurre la corda significa ridurre il numero di Reynolds e quindi aumentare la resistenza del profilo dovuta allo strato limite. Occorre pertanto stabilire se è conveniente ridurre la resistenza indotta utilizzando la pianta ellittica oppure tenere bassa la resistenza del profilo. Tanto più piccolo è il modello, tanto più conviene tenere bassa la resistenza del profilo, perché al di sotto di un certo valore della corda, la sua resistenza può crescere molto rapidamente.
- 3) Per un'ala a pianta ellittica, quando si giunge allo stallo, questo si verifica contemporaneamente (quasi) in tutte le sezioni alari. Per quest'ala, lo stallo è quindi molto brusco. Questa caratteristica può essere dannosa per alcune situazioni di volo, in particolare alla durata del volo di un aliante.

Tenendo conto di queste considerazioni, le esperienze dei progettisti hanno condotto ad una pianta alare simile a quella dell'ellisse ma più larga verso le estremità. Per superare le difficoltà costruttive dovute alla doppia curvatura si possono adottare ali con due o più livelli di rastremazione.

#### Ala a tre livelli di rastremazione



#### Calcolo dell'allungamento ottimale

L'ultimo parametro fondamentale per la progettazione della forma in pianta dell'ala è l'allungamento.

Aumentando l'allungamento, si riduce la resistenza indotta ma, riducendo la corda alare media, si aumenta la resistenza dei profili. Per stabilire il valore teorico ottimale dell'allungamento occorre fissare il  $C_L$  dell'ala, calcolare la resistenza totale di diverse ali con allungamento sempre maggiore ed infine scegliere l'allungamento al quale corrisponde la resistenza minore. A parità di altre condizioni, maggiore è il  $C_L$  di volo, maggiore risulterà il valore ottimale dell'allungamento.

Occorre ricordare che elevando l'allungamento si riduce la manovrabilità e quindi l'efficienza in manovra dell'aeroplano.

Per quanto riguarda le esperienze dei progettisti, queste hanno condotto a:

allungamento 10-12 per alianti di circa 1,5m di apertura  
 allungamento 12-15 per alianti di circa 3m di apertura  
 allungamento 20-30 per alianti di circa 20m di apertura