MANCA :

prodotto vettoriale
prodotto scalare

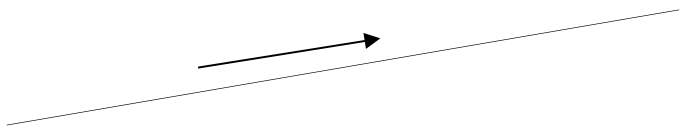
VETTORI, FORZE E MOMENTO DI UNA FORZA

Immaginiamo un corpo in movimento, ad esempio un ciclista, un motociclista, un'automobile o un aeroplano. Corpo in movimento vuol dire che man mano che trascorre il tempo, la posizione del corpo cambia nello spazio. Il fatto che la posizione del corpo cambia al variare del tempo si esprime dicendo che il corpo è dotato di una velocità.

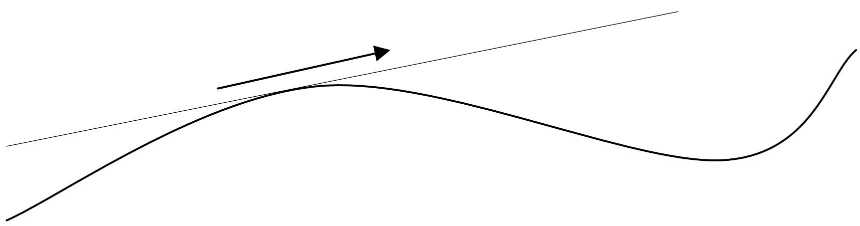
Per poter definire la velocità del corpo, si ha bisogno di stabilire tre cose:

1) Quanto è veloce il corpo. A parità di tempo trascorso, più grande è lo spazio percorso, più il corpo è veloce. In termini rigorosi, si chiama "il modulo della velocità" ed è rappresentato da un numero ad esempio 130 kilometri all'ora (Km/h) , 200 metri al secondo (m/s).

2) Che linea percorre il corpo quando si muove. Se la linea è dritta, cioè una retta la situazione è risolta, se la linea è curva, bisogna considerare un istante di tempo, in quell'istante la linea è la retta tangente alla curva nel pinto occupato dal corpo in quell'istante di tempo. In definitiva, si ha bisogno di definire una retta sulla quale si muove il corpo in un certo istante. In termini rigorosi, si chiama "la direzione della velocità".



Retta che rappresenta la direzione della velocità nel caso la linea percorsa dal corpo sia dritta



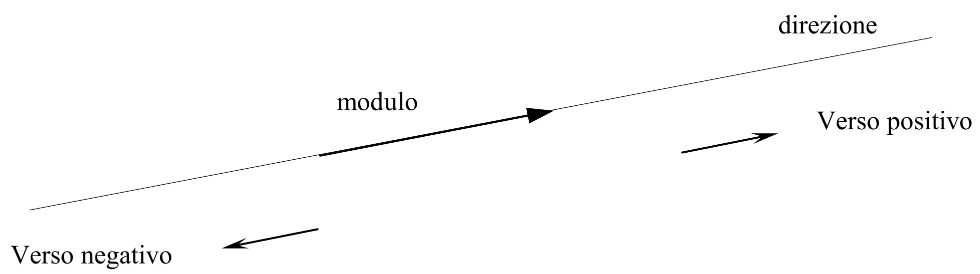
Retta che rappresenta la direzione della velocità in un certo istante di tempo nel caso la linea percorsa dal corpo sia curva

3) In quale verso viene percorsa la retta che rappresenta la direzione. Una retta, mettiamo orizzontale, può essere percorsa, da destra verso sinistra oppure da sinistra verso destra. Se percorrendola da sinistra verso destra diciamo che il verso è positivo, percorrendola da destra verso sinistra il verso sarà negativo. In termini rigorosi si chiama "verso della velocità".

Abbiamo quindi visto che per definire la velocità occorre definire queste tre entità: modulo, direzione e verso.

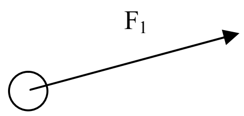
Un altro esempio di una grandezza che per essere definita ha bisogno di modulo direzione e verso è la forza. Per definire quanto è grande la forza è necessario il modulo, per stabilire dove tira la forza si ha bisogno della direzione, per stabilire da quale parte della direzione tira la forza occorre il verso.

Un **vettore** è una entità creata proprio per rappresentare le grandezze che per definirle si ha bisogno di modulo direzione e verso.
Il vettore si rappresenta graficamente con un segmento orientato, in altre parole si rappresenta con una freccia. La lunghezza della freccia ci indica il modulo, la retta che si ottiene prolungando il segmento è la direzione, la punta della freccia indica il verso.

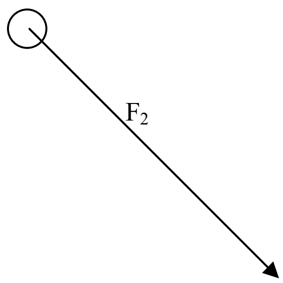


Somma di vettori

Supponiamo di avere una pallina sul tavolo e di applicargli la forza F_1. Si intuisce che la pallina si muoverà nella direzione della forza applicata.

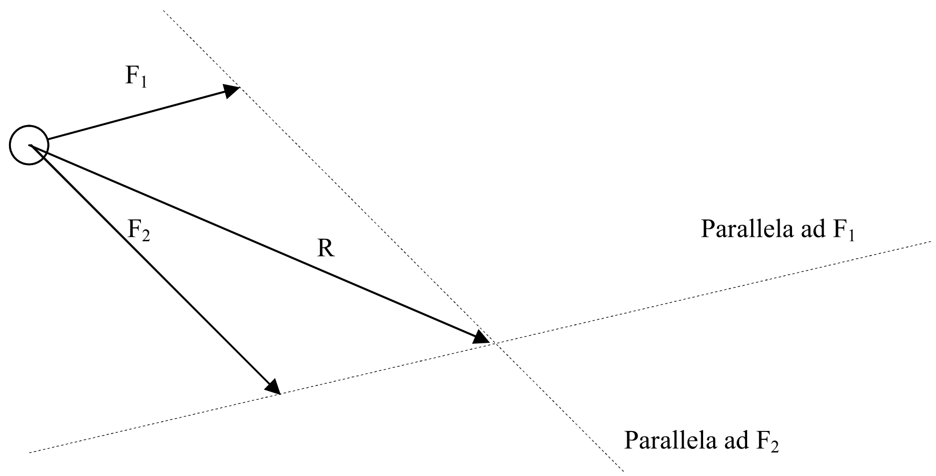


Se applichiamo una forza F2, la pallina si muoverà nella direzione di F2.



A questo punto, ci si può chiedere come si muoverà la pallina se applichiamo ad essa contemporaneamente le forze F_1 ed F_2.

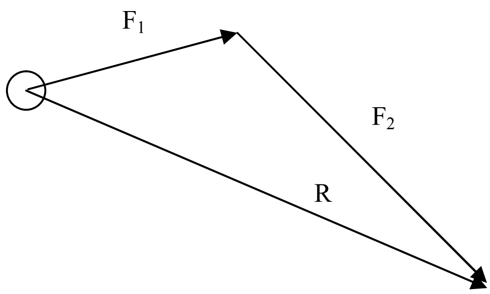
Chi ha studiato questo problema, centinaia di anni fa, ha scoperto che la pallina si muoverà come se fosse spinta da una unica forza R costruita col seguente schema:



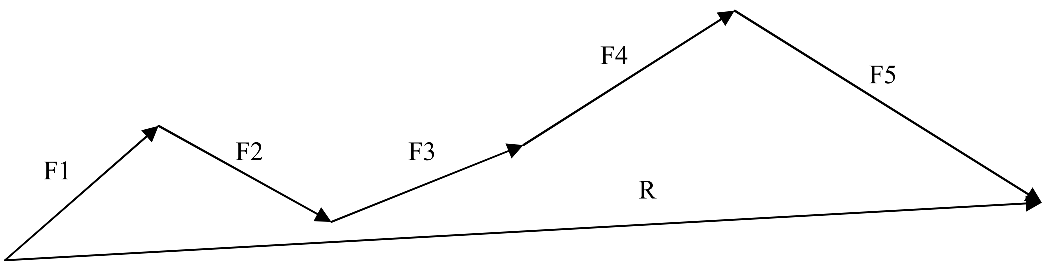
Questo schema si chiama **regola del parallelogramma**, l'operazione si chiama **somma dei vettori**, il vettore somma R si chiama **risultante dei vettori** F_1 ed F_2.

La somma di due o più vettori è una operazione che fornisce un altro vettore, detto risultante, la cui applicazione produce lo stesso effetto dell'applicazione dei vettori originari..

Un'altra versione della precedente costruzione geometrica, quindi un altro modo per sommare i vettori è il seguente.



Questo metodo è molto utile quando i vettori da sommare sono più di due:



Calcolo della risultante (modulo e direzione)

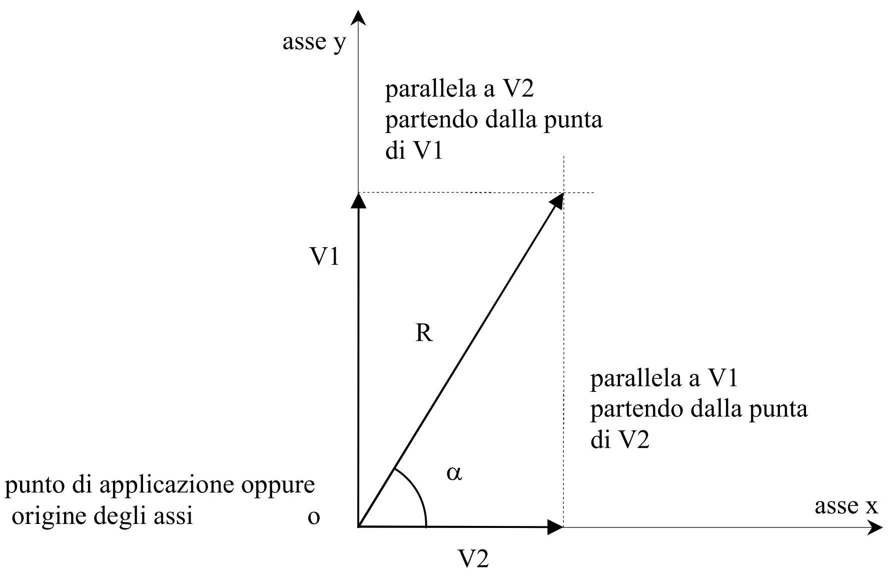
Esistono tre modi per determinare il modulo e la direzione del vettore risultante:

Il primo metodo, il più antico, consiste nell'effettuare una costruzione grafica, la regola del parallelogramma, con le lunghezze in scala e gli angoli tracciati in maniera precisa. Dalla misura con una riga del vettore risultante, tramite il fattore di scala se ne ricava il modulo. la direzione della risultante, rispetto ad una retta di riferimento scelta si misura direttamente col goniometro. Questo metodo era utilizzato in campo tecnico prima che fossero diffusi i calcolatori tascabili o da scrivania, infatti, in quell'epoca, effettuare un calcolo relativamente semplice richiedeva l'utilizzo del regolo e/o delle tabelle e richiedeva più tempo dei metodi grafici

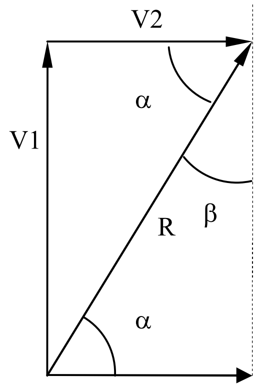
Il secondo metodo è basato sulle componenti dei vettori e sarà spiegato nelle prossime pagine dopo aver spiegato la scomposizione di un vettore.

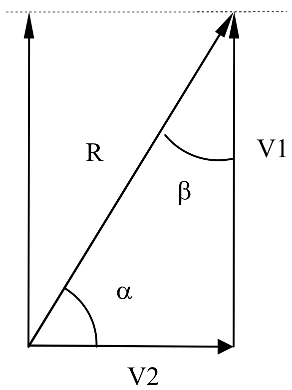
Il terzo metodo (*semplificato per vettori perpendicolari e ciascuno parallelo ad uno degli assi di riferimento*) è basato sull'impiego del teorema di Pitagora e delle relazioni trigonometriche fondamentali e sarà ora illustrato.

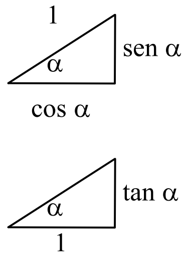
Assegniamo due vettori tramite il loro modulo ed il loro angolo rispetto all'orizzontale ed effettuiamo la somma con la regola del parallelogrammo anche in modo non perfetto come risulta a mano libera:



Con la somma di vettori eseguita col metodo del triangolo oppure sfruttando la proprietà che il lati opposti di un rettangolo sono uguali a due a due conviene considerare una delle due seguenti figure:







La costruzione grafica perviene ad un triangolo rettangolo del quale i cateti sono i due vettori da sommare V1 e V2 mentre l'ipotenusa è il vettore risultante R. Pertanto,

Il modulo del vettore risultante R può essere calcolato col teorema di Pitagora:

$$R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

La direzione della risultante R individuata rispetto all'orizzontale quindi attraverso l'angolo α può essere calcolata con:

$$\alpha = \tan g^{-1}\left(\frac{V1}{V2}\right) \qquad \text{oppure} \qquad \alpha = sen^{-1}\left(\frac{V1}{R}\right) \qquad \text{oppure} \qquad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{V2}{R}\right)$$

La direzione della risultante R individuata rispetto alla verticale quindi attraverso l'angolo β può essere calcolata con:

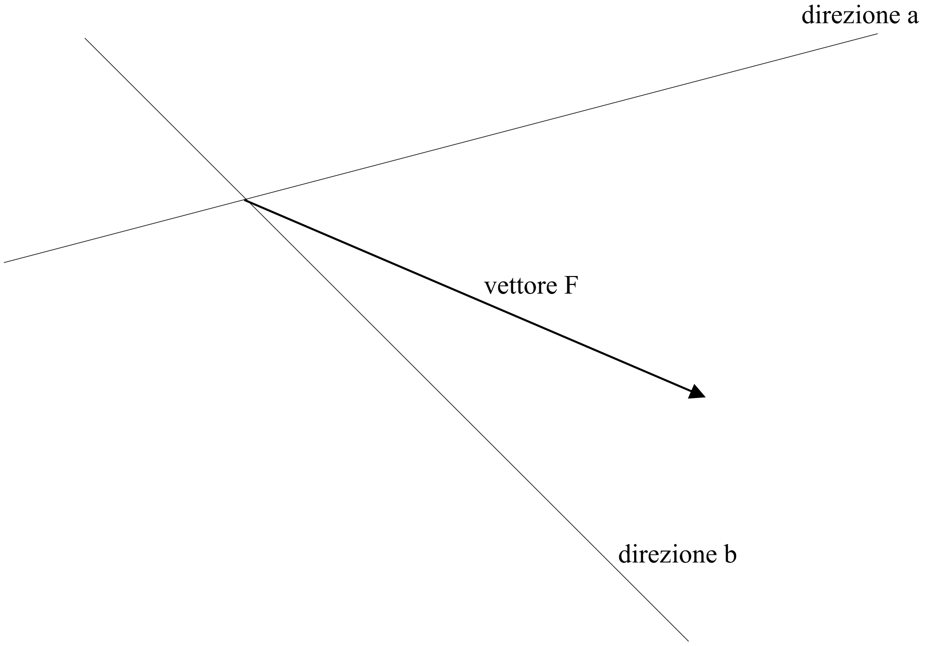
$$\beta = \tan g^{-1}\left(\frac{V2}{V1}\right) \qquad \text{oppure} \qquad \beta = sen^{-1}\left(\frac{V2}{R}\right) \qquad \text{oppure} \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{V1}{R}\right)$$

Ovviamente, di queste relazioni se ne possono ottenere le inverse per calcolare ciò che nei nostri problemi è incognito.

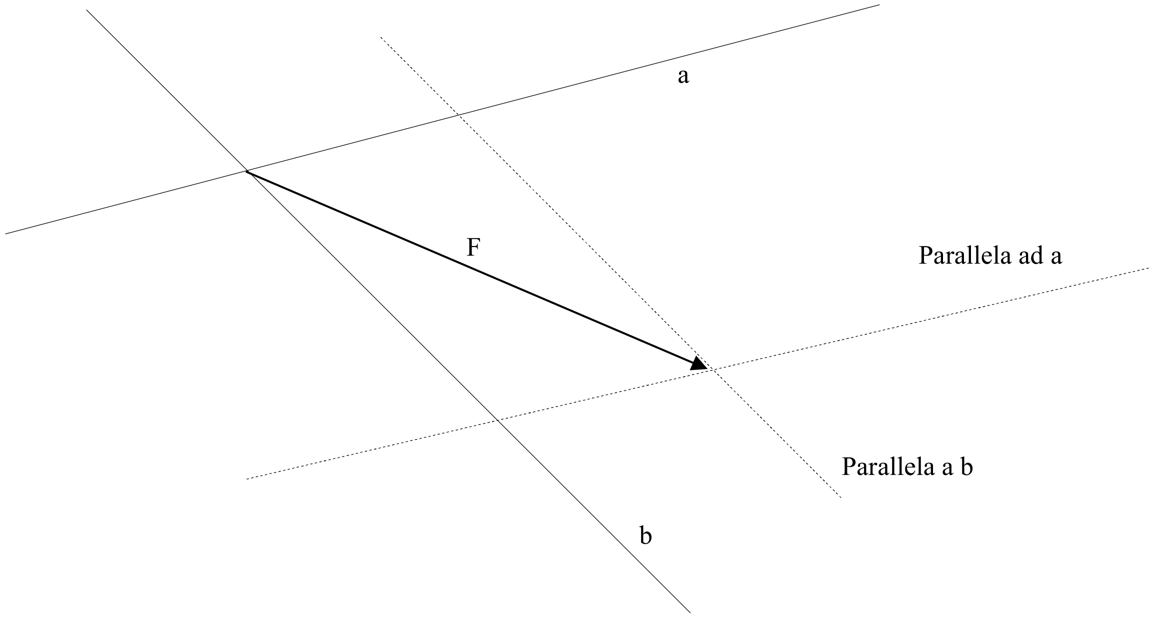
Scomposizione di un vettore in due direzioni

In alcuni tipi di problemi può essere necessario studiare la situazione lungo due differenti direzioni. In altre parole, conviene o addirittura è necessario scomporre un problema difficile da risolvere in due problemi più facili. Per rendere possibile ciò occorre scomporre i vettori nelle due direzioni scelte. Scomporre un vettore vuol dire trovare due vettori, detti **componenti del vettore**, che sommati tra loro con la regola del parallelogramma danno il vettore originario.

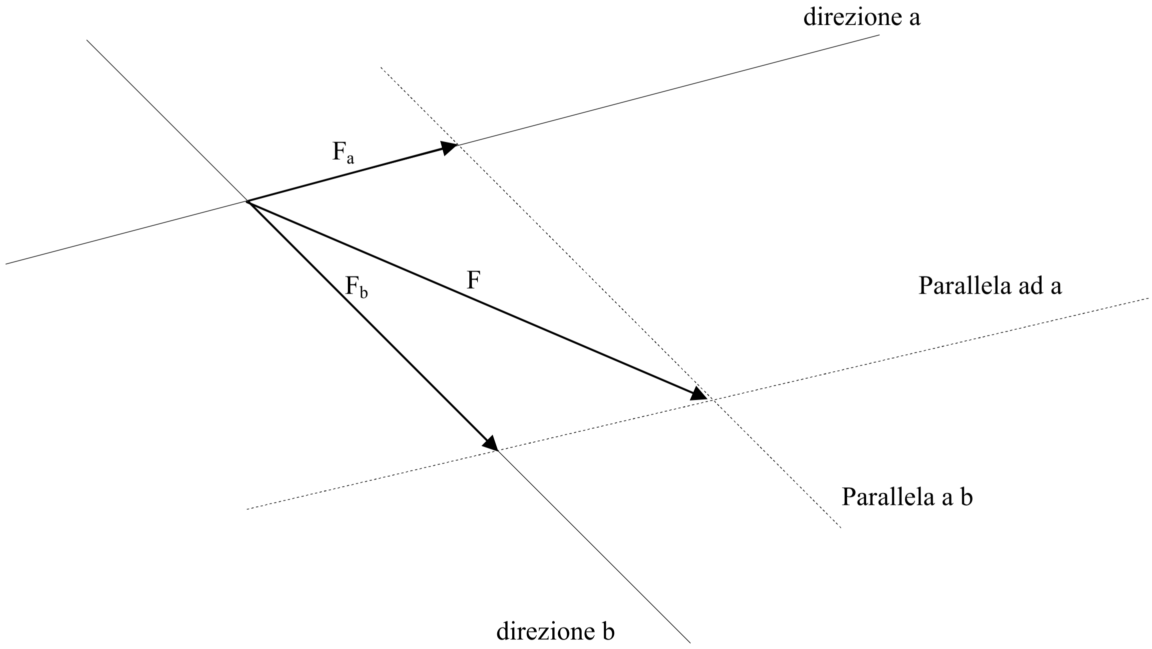
Per scomporre il vettore lungo due direzioni assegnate occorre trasportare, senza farlo ruotare e senza allungarlo, il vettore all'incrocio delle due rette,
Partiamo da questa situazione:



poi si applica la regola del parallelogramma al contrario cioè si parte dalla punta del vettore F che si intende scomporre e tracciano le parallele alle rette date a e b come nella figura sotto.



Infine, le componenti del vettore F si ottengono unendo il punto di applicazione del vettore F con l'incrocio delle rette a e parallela a b e poi b e parallela ad a. esattamente come nella figura sotto.



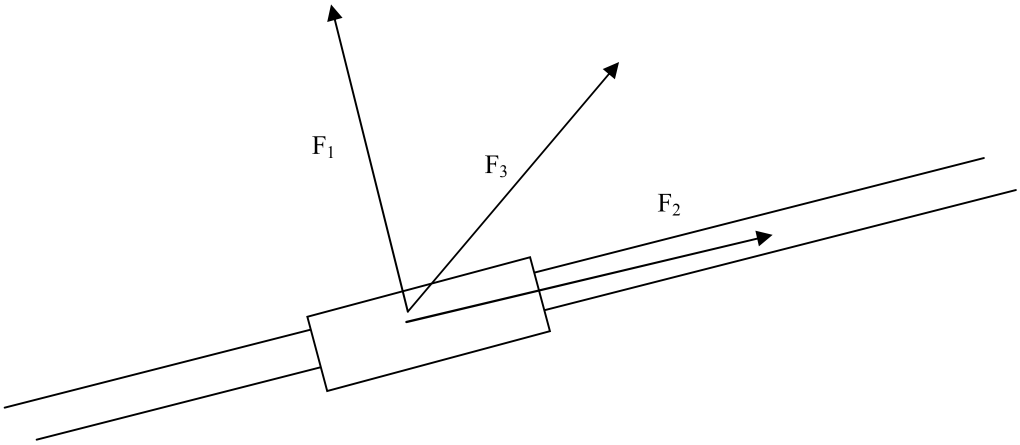
F_a ed F_b rappresentano le componenti del vettore F lungo le direzioni a e b.

E' essenziale ricordare che o applichiamo il vettore F oppure applichiamo le sue componenti, gli effetti prodotti sul corpo sono gli stessi.

Per determinare le componenti o degli angoli o qualunque altro parametro incognito possono essere utilizzate le relazioni, o le loro inverse, già viste per la somma.

Scomposizione del vettore lungo una direzione

Supponiamo di avere un carrello su di un binario, per spingerlo applichiamo una forza non necessariamente parallela al binario:

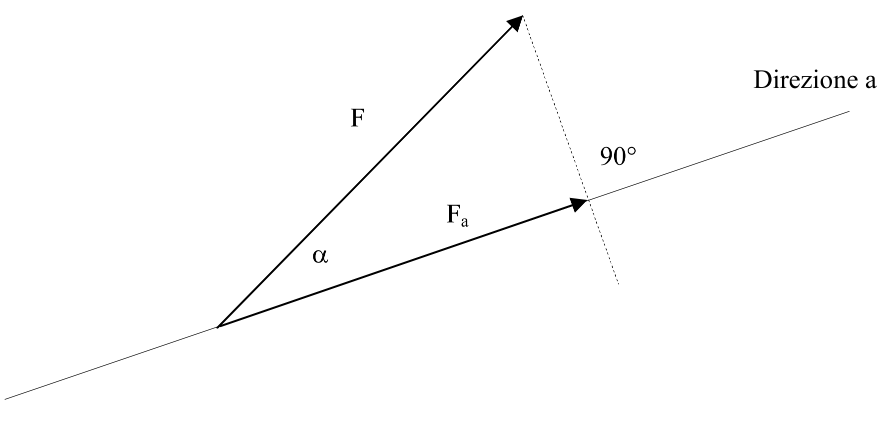


E' intuitivo capire che la forza F_1, che è perpendicolare al binario, non può spostare il carrello, quindi non produce nessun effetto apparente. La forza F_2 , che è parallela al binario, sposta facilmente il carrello, quindi produce il massimo effetto. La forza F_3, inclinata di un certo angolo rispetto al binario produrrà un effetto intermedio fra quelli di F_1 ed F_2.

Ci si può chiedere quale è la parte di una forza inclinata rispetto al binario, come F3, che effettivamente spinge il carrello?.

In altre parole, quale deve essere la forza parallela al binario che produce sul carrello lo stesso effetto di una forza generalmente inclinata come F_3.

Questa parte della forza F che effettivamente spinge il carrello si chiama componente di F in una direzione (in questo caso è la direzione del binario) e si determina con la seguente costruzione geometrica:

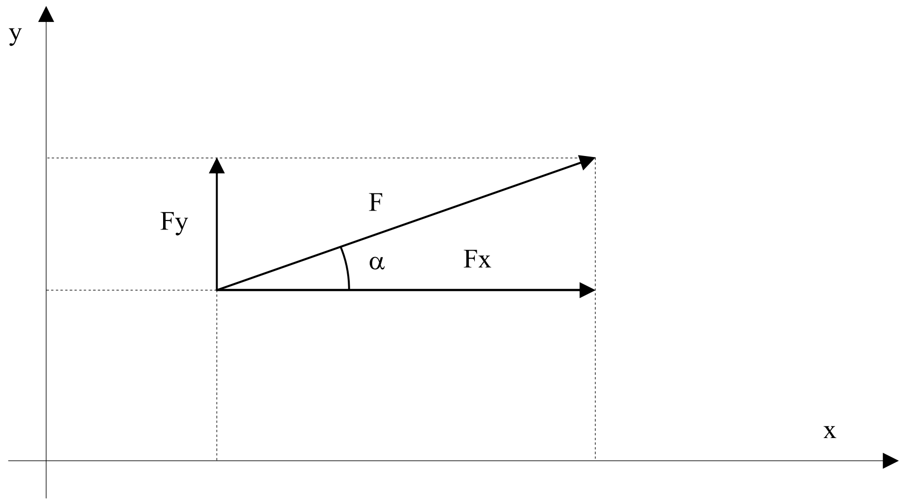


La componente di F nella direzione a , cioè Fa, è la forza che, lungo la direzione a produce lo stesso effetto della forza inclinata F. Si calcola con $Fa = F \cos \alpha$

Rappresentazione di un vettore tramite le sue componenti

Un vettore si può rappresentare attraverso le sue componenti rispetto agli assi di un sistema cartesiano ortogonale di assi x,y,z. Esprimere per componenti un vettore, in determinate situazioni, facilita i calcoli nelle operazioni con i vettori.

Vediamo le componenti di un vettore in un riferimento piano:



Utilizzando la trigonometria, le relazioni fra il modulo F e le sue componenti sono:

$$Fx = F \cdot \cos \alpha$$

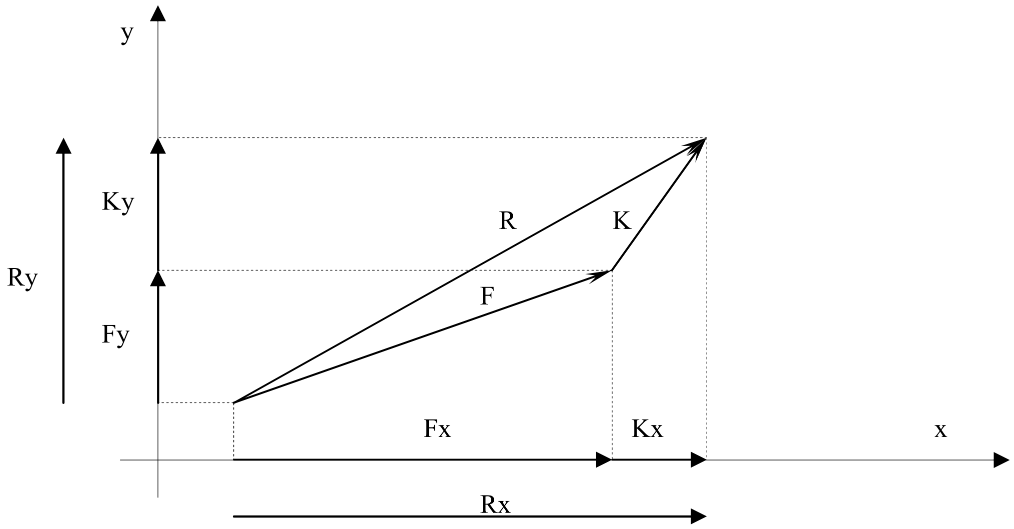
$$Fy = F \cdot \text{sen}\ \alpha$$

$$Fx = Fy \cdot \text{t}an\ \alpha$$

Col teorema di Pitagora vale poi la relazione:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Somma di vettori eseguita con le componenti



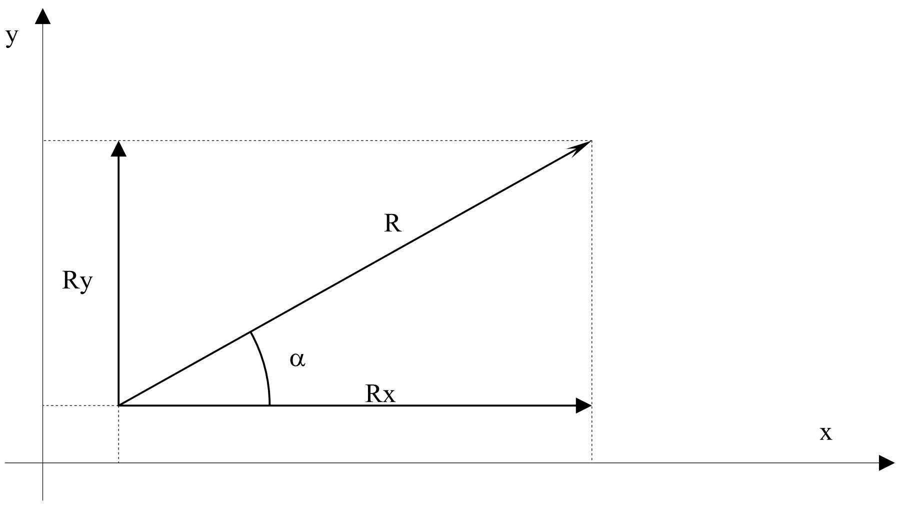
La somma vettoriale di F e K è la risultante R. Dalla figura sopra, eseguita la somma grafica si vede che le componenti della risultante R sono uguali alla somma delle componenti dei vettori F e K fatte lungo i rispettivi assi. Le componenti lungo l'asse x si sommano solo fra loro e così le componenti y:

$Rx = Fx + Kx \qquad\qquad Ry = Fy + Ky$

Se poi si rende necessario conoscere il modulo della risultante R, si calcola col teorema di Pitagora:

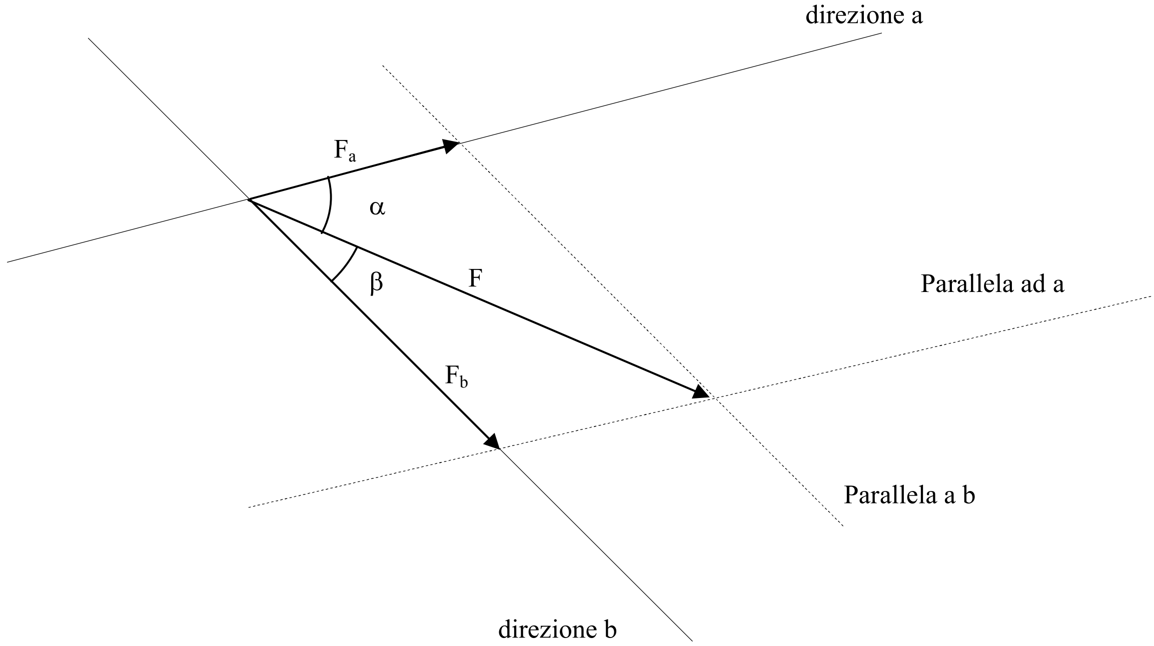
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

Se è necessario conoscere la direzione della risultante R (la direzione si determina determinando il suo angolo rispetto ad una direzione di riferimento, mettiamo l'asse x) .

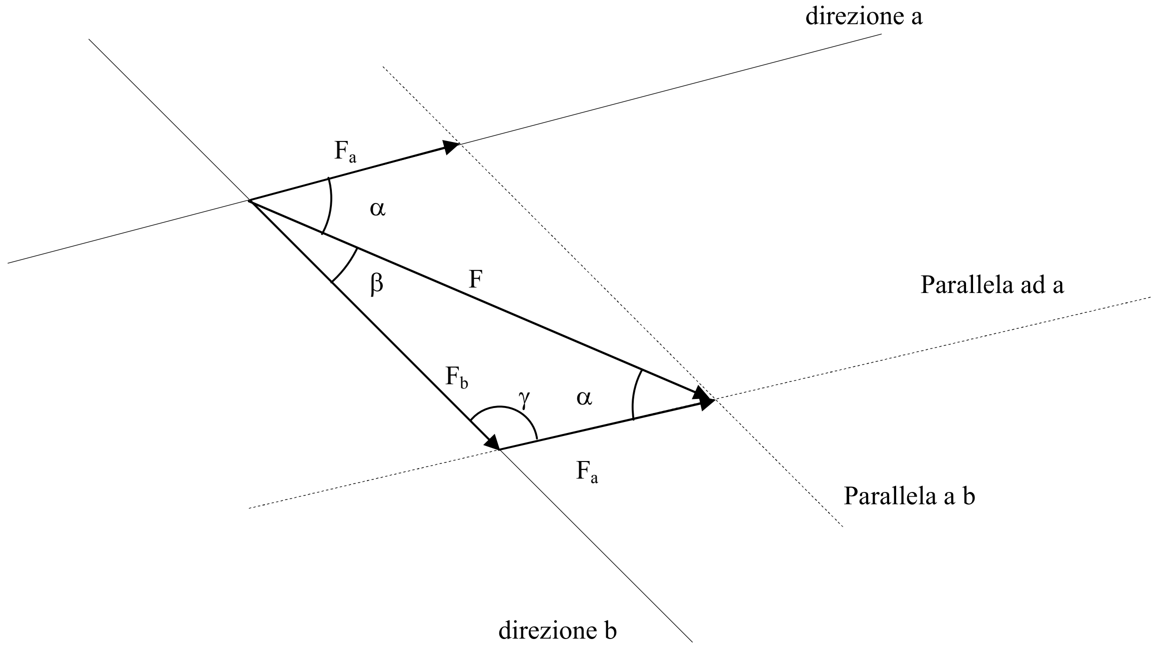


$$\alpha = \arctan \frac{R_y}{R_x}$$

Calcolo delle componenti di un vettore in due direzioni non ortogonali.



In un problema di scomposizione i genere sono noti F, α e β applicando le regole della geometria, possiamo pervenire alle indicazioni riportate nella seguente figura:

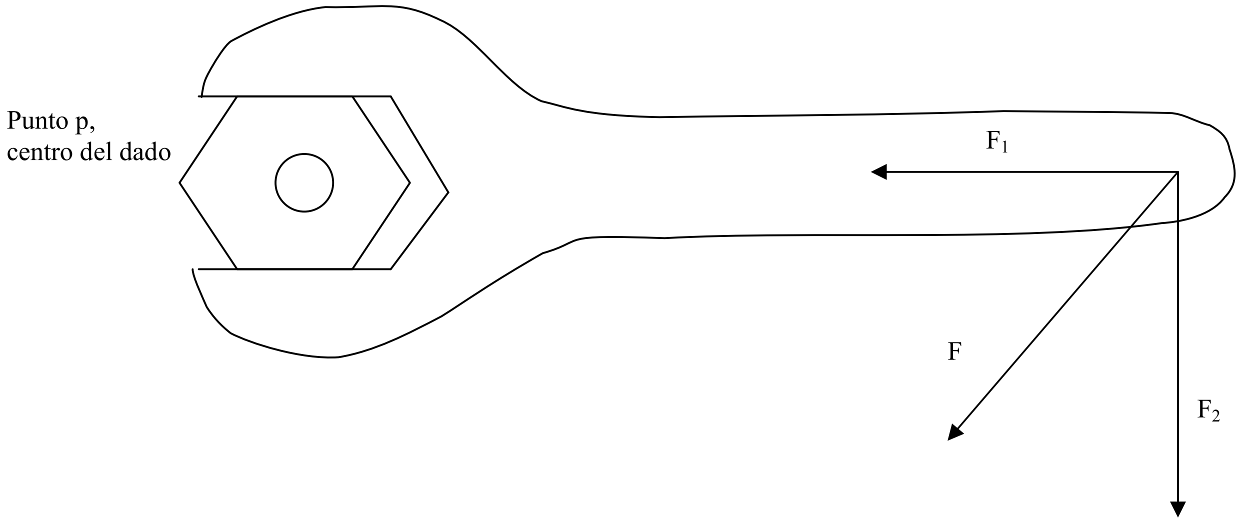


Con $\gamma = 180 - \alpha - \beta$

Col teorema dei seni si può calcolare: $F_a = F \cdot \dfrac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma}$ $F_b = F \cdot \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma}$

Momento di una forza rispetto ad un punto.

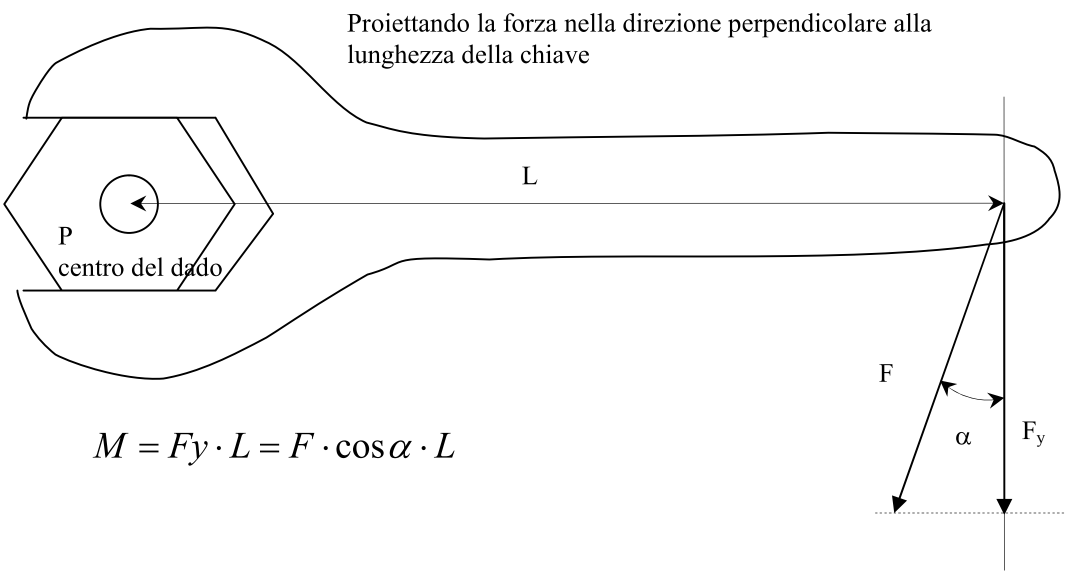
Immaginiamo di dover serrare il dado di una vite con una chiave:



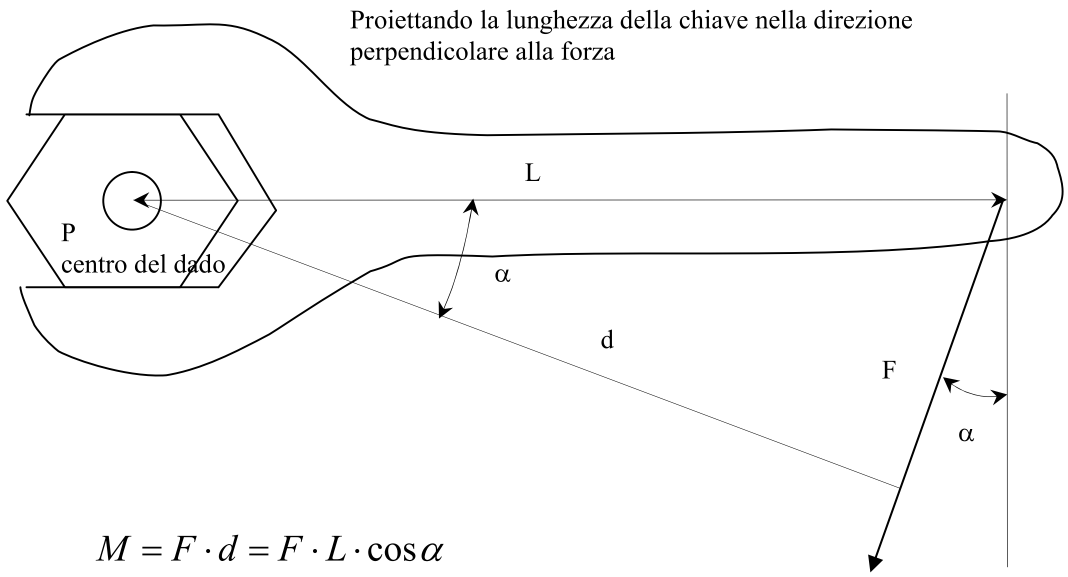
E' intuitivo capire che se tiriamo la chiave con la forza F_1, la cui direzione passa per il centro del dado, sarà impossibile stringere il dado stesso. Si riuscirà a stringere meglio il dado applicando la forza F_2 che è perpendicolare alla retta che passa per il centro del dado e per il manico della chiave. La forza inclinata F avrà un effetto intermedio.

L'azione che stringe il dado è una specie di forza rotante, si chiama **momento della forza F rispetto al punto P**. Ci si può chiedere la seguente cosa: applicando una certa forza F generalmente inclinata, quanto vale il momento rispetto ad un punti fissato, cioè quanto vale la sua azione rotante?

Il momento si può calcolare in due modi:

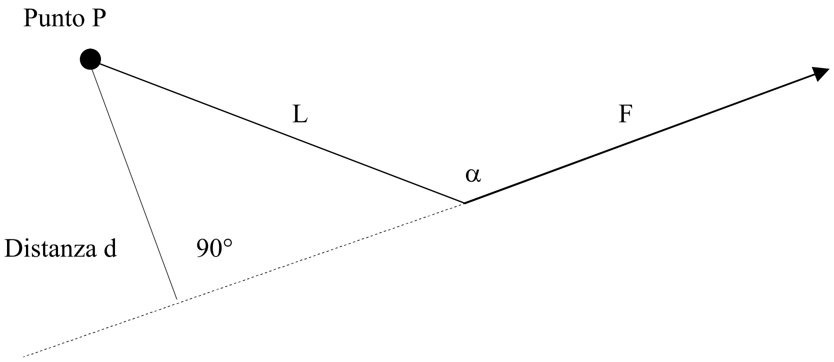


$$M = Fy \cdot L = F \cdot \cos\alpha \cdot L$$



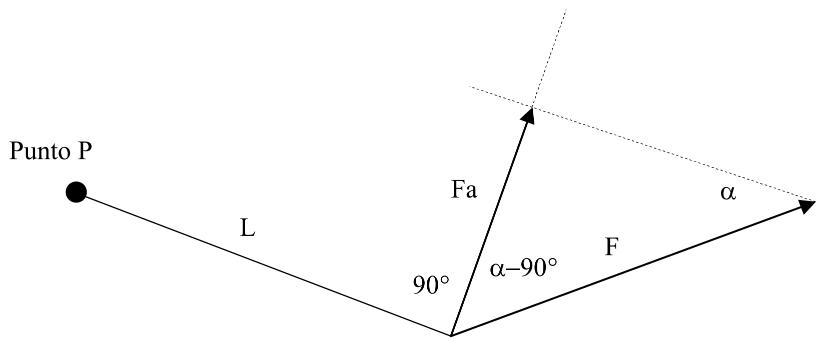
$$M = F \cdot d = F \cdot L \cdot \cos\alpha$$

1) M = F d
dove d è chiamato distanza fra il punto e la retta di azione della forza ed è un segmento perpendicolare alla direzione della forza. Si determina con la seguente costruzione geometrica:



Se si conosce la lunghezza L del segmento che unisce il punto P col punto di applicazione della forza e l'angolo α, si ha che d = L sen α e quindi M = F L sen α.

Un altro metodo è quello di moltiplicare la lunghezza L per la componente di F lungo la direzione perpendicolare ad L.



M = Fa L   poiché   Fa = F sen α allora   M = F L sen α

Il momento è un vettore, il prodotto M = F L sen α è la sua intensità o modulo, indica quanto è "grande l'azione rotante". Il verso dipende dal fatto che il braccio L può ruotare o in verso orario o in verso antiorario. La direzione indica l'asse di rotazione, è perpendicolare al piano formato dalle due direzioni costituite dalla forza e dal braccio. In genere tali direzioni sono tracciate nel piano del foglio o della lavagna, per cui la direzione del momento è perpendicolare ad essi.