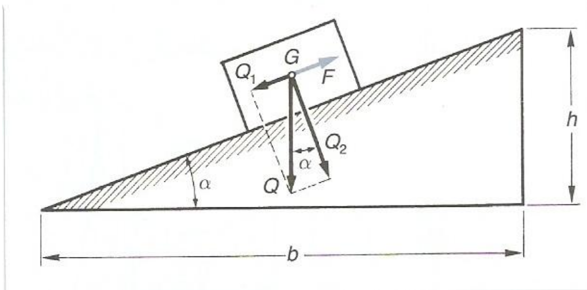
# Piano inclinato e Vite

## Piano inclinato senza attrito

Il piano inclinato è una macchina semplice che può anche far parte di macchine più complesse. Esso può essere impiegato per ottenere una variazione della direzione del moto combinata con un guadagno di forza.
Ad esempio, supponiamo che il triangolo in basso (piano inclinato) sia parte di un componente meccanico. Se tale componente viene spinto verso sinistra, il rettangolo, che rappresenta un altro componente meccanico, se opportunamente vincolato, salirà verso l'alto. Pertanto, un moto orizzontale viene trasformato in un moto verticale.

Indicata con F la forza motrice, la potenza, secondo la terminologia introdotta con le leve, e con Q la forza da equilibrare, da applicare, la cosiddetta resistenza, possiamo distingue due casi:

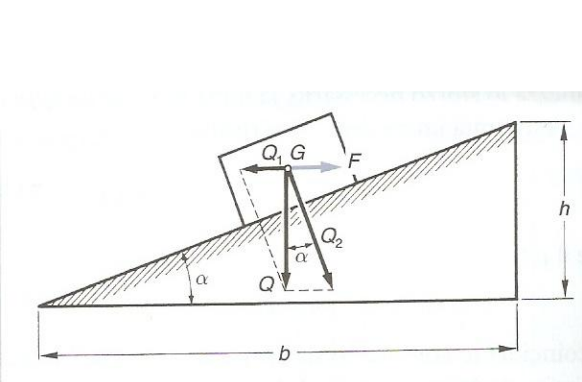



5.19 Piano inclinato con forza motrice parallela a esso.

Questo è il caso in cui l'elemento meccanico rappresentato da rettangolo è spinto lungo il piano.
Otteniamo la relazione fra F e Q scomponendo quest'ultima nelle direzioni parallela e perpendicolare al piano. Scegliamo la direzione di scomposizione parallela al piano in modo che la componente ottenuta di Q sia parallela ad F e quindi direttamente confrontabile con questa. E' trascurato l'attrito

$F = Q_1 \qquad F = Q \cdot sen\alpha$

Minore è l'angolo alfa, minore sarà la forza F



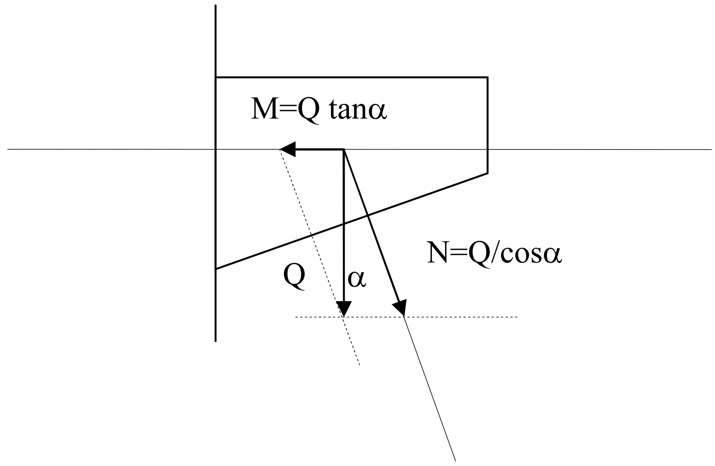

5.20 Piano inclinato con forza motrice orizzontale.

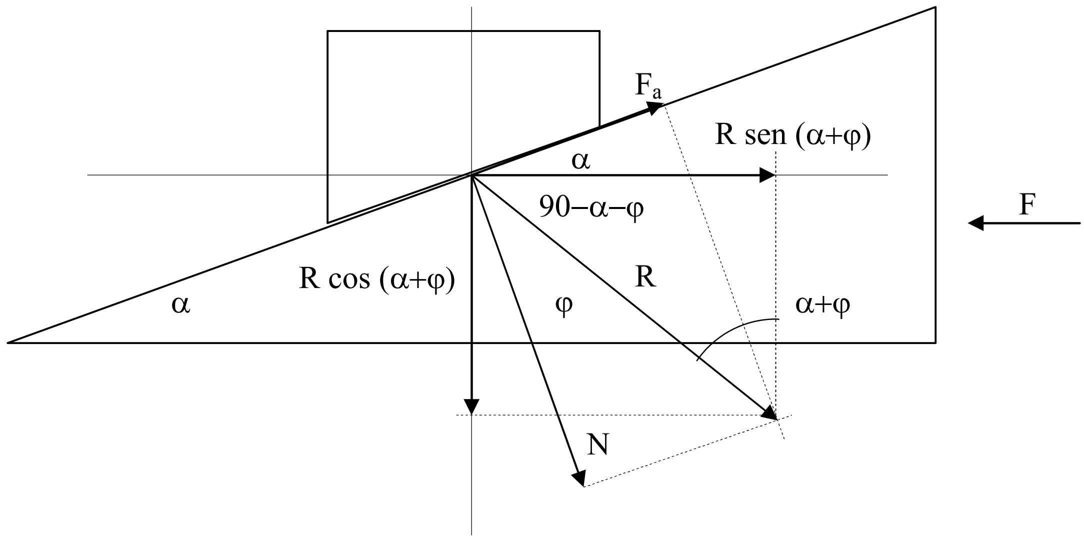
Otteniamo la relazione fra F e Q scomponendo quest'ultima nelle direzioni parallela al piano. e parallela ad F scegliamo la direzione di scomposizione parallela al piano in modo che la componente ottenuta di Q sia parallela ad F e quindi direttamente confrontabile con questa. E' trascurato l'attrito:

$F = Q_1 \qquad F = Q \cdot \tan\alpha$

Se l'angolo alfa è minore di 45°, la tangente è minore di 1, quindi F è minore di Q.
Analogamente, se alfa è maggiore di 45° allora F sarà maggiore di Q.

**Piano inclinato con attrito**




Consideriamo due elementi meccanici che schematizziamo col piano inclinato triangolare ed un trapezio. Al trapezio è applicata la forza Q, al piano inclinato la forza F. Vogliamo conoscere la forza F da applicare all'elemento triangolare per far salire quello trapezoidale, su cui grava il carico Q, tenendo conto dell'attrito.

La forza Q applicata all'elemento trapezoidale la scompongo in una direzione normale alla superficie di contatto col piano inclinato. Scelgo questa direzione per calcolare direttamente la forza di attrito. Se la forza di attrito è uguale alla forza normale per il coefficiente di attrito, mi ricavo direttamente la forza normale senza altri passaggi.

L'altra direzione di scomposizione della Q dipende da come è vincolato l'elemento trapezoidale, mettiamo che ci sia una guida sul lato sinistro, quindi la direzione di composizione è la normale a questa guida. L'elemento trapezoidale applica quindi la forza N al piano inclinato. Sotto l'azione della forza F il piano inclinato si muove verso sinistra, ipotizziamo che l'accelerazione sia trascurabile, altrimenti dovremmo considerare anche le forze di inerzia. Il moto relativo fra le superfici dell'elemento trapezoidale e del piano inclinato determina la forza di attrito $F_a$ , pertanto, al piano inclinato sono applicate N ed $F_a$. Ne tracciamo la risultante R per poi scomporla nelle direzioni di Q ed F. Potremmo anche scomporre separatamente N ed $F_a$ ma questo porterebbe a passaggi matematici più complicati. Dalla scomposizione di R e scrivendo le equazioni di equilibrio orizzontale e verticale del piano inclinato, ricaviamo:

$$F = R \cdot sen(\alpha + \varphi)$$

$$Q = R \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$

dove $\varphi = \arctan \cdot \mu$

Dividendo membro a membro queste due equazioni, ricavo:

$$\frac{F}{Q} = \frac{R \cdot sen(\alpha + \varphi)}{R \cdot \cos(\alpha + \varphi)}$$

Da cui ricavo la relazione cercata: $F = Q \cdot \tan(\alpha + \varphi)$

Da questa relazione, si osserva che per $(\alpha + \varphi)$ tendente a 90°, la tangente e quindi F tende ad infinito, questo vuol dire che non si otterrà il sollevamento dell'elemento trapezoidale qualunque sia la forza F applicata. Ciò si vede anche dalla $Q = R \cdot \cos(\alpha + \varphi)$, il coseno tenderà a zero, quindi affinché sia equilibrata la Q, R che a sua volta tende ad F, deve tendere all'infinito.

Se invertiamo il moto, cioè l'elemento trapezoidale scende e quello triangolare si sposta a destra, si inverte il verso della forza di attrito $F_a$, le equazioni di equilibrio diventano:

$$F = R \cdot sen(\alpha - \varphi)$$

$$Q = R \cdot \cos(\alpha - \varphi)$$

$F = Q \cdot \tan(\alpha - \varphi)$ da cui:

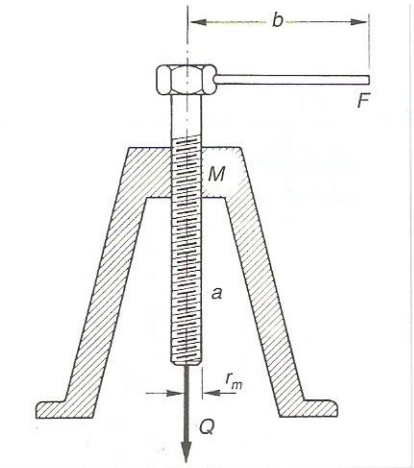
Da queste relazioni osserviamo che:

Se $\alpha = \varphi$, F diventa zero, questo vuol dire che la sola forza di attrito fa in modo che il carico Q sia in equilibrio.

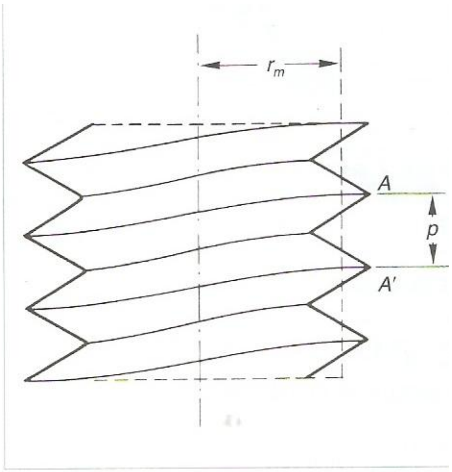
Se $\alpha < \varphi$, F diventa negativa, questo vuol dire che il verso della forza necessaria all'equilibrio è verso destra, cioè se annulliamo la F, l'elemento trapezoidale non scende qualunque sia il carico Q. Si dice il meccanismo è irreversibile, cioè se spingo verso sinistra il trapezio sale, se è il trapezio a spingere verso il basso, il triangolo non si muove a meno che non lo tiri verso destra.

Se $\alpha > \varphi$ e $(\alpha + \varphi) <$ 90° il meccanismo è reversibile

**Vite ( di manovra)**

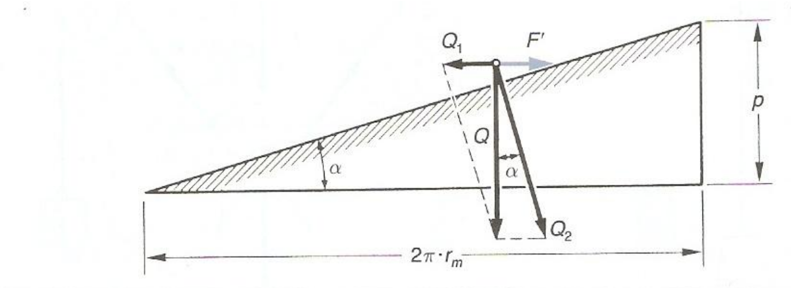



5.24 Vite per sollevamento (schema).




5.25 Caratteristiche di una vite.

Supponiamo di conoscere geometricamente la vite.
Ruotando la vite rispetto alla madrevite, essa si sposta lungo il suo asse.
Ha interesse stabilire una relazione fra il momento torcente M applicato alla vite e la forza assiale Q prodotta.
Per far ciò, supponiamo che il filetto sia quadrato o rettangolare e trasformiamolo in un piano inclinato. Cioè, immaginiamo di srotolare una linea che percorre il filetto per un giro completo e di riportarla sul foglio di carta.




5.26 Riduzione dello studio della vite a quello del piano inclinato.

La lunghezza P è il passo della vite, cioè la distanza fra due creste consecutive del filetto. La base del triangolo ottenuto dallo srotolamento di un giro di filetto è la lunghezza della circonferenza della vite. $L = 2 \pi r$, dove r è la distanza dei punti della linea dall'asse della vite. Si dovrebbe capire che la lunghezza L, e quindi l'angolo di inclinazione $\alpha$, dipende da r, cioè dal fatto che la linea presa sul filetto sia più interna o più esterna. Si assume che la linea sia sul raggio medio $r_m$ del filetto, cioè la media fra i raggi della vite misurati all'esterno e sul fondo del filetto.
Date le misure del passo della vite e del filetto da cui ricaviamo il raggio medio, l'angolo di inclinazione del piano è:

$$\tan\alpha = \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot r_m} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{p}{2 \cdot \pi \cdot r_m}\right)$$

Con riferimento alla figura 5.26, durante la rotazione della vite, è come se l'elemento di madrevite a contatto col filetto sviluppato venisse spinta contro di esso con la forza F'. F' è la forza applicata a distanza $r_m$ dall'asse della vite relativa al momento M applicato per ruotare la vite stessa. Pertanto:

$M = F' \cdot r_m$ da cui $F' = \frac{M}{r_m}$ poiché $F' = Q_1$ allora

$\frac{M}{r_m} = Q_1$ da cui $\frac{M}{r_m} = Q \cdot \tan\alpha$ $\frac{M}{r_m} = Q \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi \cdot r_m}$

infine: $M = Q \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi}$

Se si vuole considerare l'attrito radente fra le superfici a contatto, si ha :

Vite di manovra con attrito

dallo studio del piano inclinato con attrito sappiamo che:

$Q_1 = Q \cdot \tan(\alpha + \varphi)$ quindi, sostituendolo nella espressione $\frac{M}{r_m} = Q_1$, si ha:

$\frac{M}{r_m} = Q \cdot \tan(\alpha + \varphi)$ da cui:

$$M = r_m \cdot Q \cdot \tan(\alpha + \varphi)$$

dove, geometricamente l'angolo alfa, si calcola sempre con la:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{p}{2 \cdot \pi \cdot r_m}\right)$$

Se non si applica alcun momento alla vite, il carico Q tende a svitarla spontaneamente. L'unica azione che si oppone allo svitamento spontaneo è la forza di attrito che si instaura. Considerati i dovuti passaggi, il momento di svitamento vale:

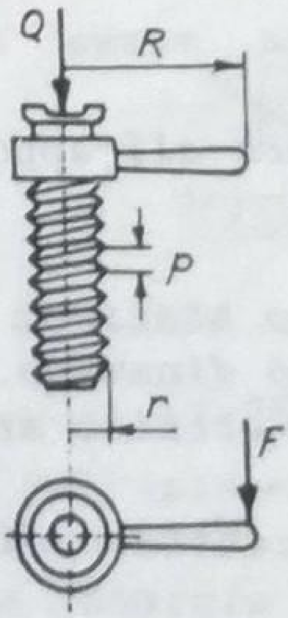
$$M = r_m \cdot Q \cdot \tan(\alpha - \varphi)$$

Se $\alpha = \varphi$, M diventa zero, questo vuol dire che la sola forza di attrito fa in modo che il carico Q sia in equilibrio.

Se $\alpha < \varphi$, M diventa negativo, questo vuol dire che il verso del momento necessario all'equilibrio è a svitare, cioè se annulliamo M, la vite non si svita qualunque sia il carico Q. Si dice il meccanismo è irreversibile, cioè se spingo verso sinistra il trapezio sale, se è il trapezio a spingere verso il basso, il triangolo non si muove a meno che non lo tiri verso destra.

Se $\alpha > \varphi$ e $(\alpha + \varphi) < 90°$ il meccanismo è reversibile.

## Vite




Trascurando l'attrito:

$$F = Q \cdot \frac{p}{2\pi R}$$

$$Q = F \cdot \frac{2\pi R}{p}$$

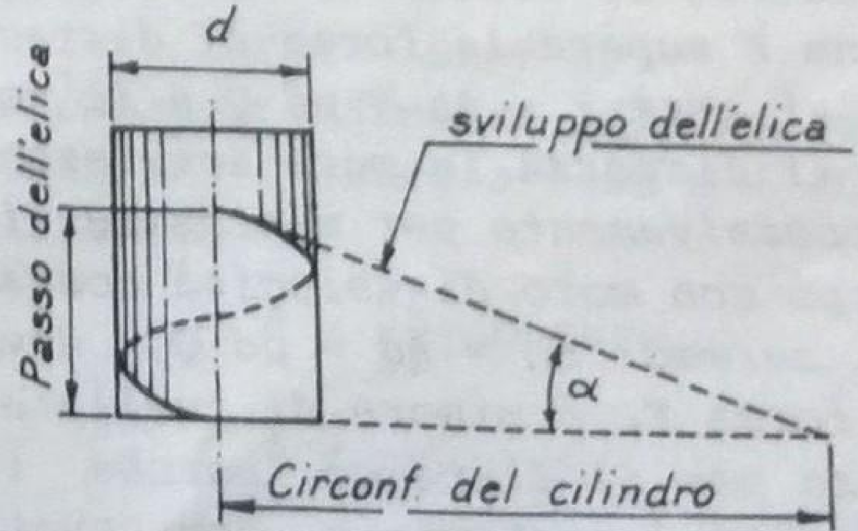
Con l'attrito: (in direzione di Q).

$$F = Q \cdot \frac{2\pi\mu r - p}{2\pi r + \mu p} \cdot \frac{r}{R}$$

(in direzione opposta a Q).

$$F = \left( \frac{p + 2\pi\mu r}{2\pi r - \mu p} \cdot \frac{r}{R} \right) \cdot Q$$

## Calcolo dell'angolo dell'elica della vite




$$\text{tang } \alpha = \frac{\text{passo}}{d\pi}$$