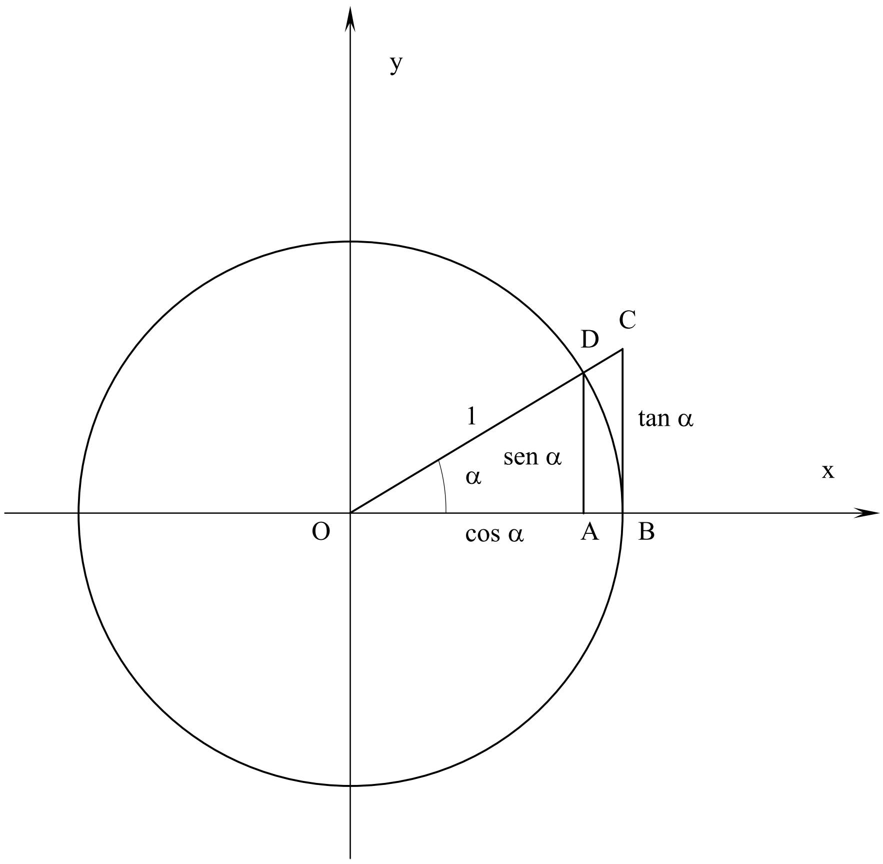
Trigonometria

Per la risoluzione di triangoli rettangoli

Si chiama circonferenza trigonometrica una circonferenza di raggio uno il centro della quale è l'origine di un sistema di assi cartesiano.

Consideriamo un raggio che forma un angolo α con l'asse x

Deve essere assolutamente ricordata questa figura:



I segmenti OD ed OB sono lunghi 1 poiché sono due raggi della circonferenza

Il segmento AD ha una lunghezza che viene chiamata seno dell'angolo α , sen α

Il segmento OA ha una lunghezza che viene chiamata coseno dell'angolo α , cos α

Il segmento BC ha una lunghezza che viene chiamata tangente (trigonometrica) dell'angolo α , tan α

Il segmento OC ha una lunghezza che dipende dall'angolo α ma in genere non è utilizzata

Notare bene che i segmenti:

AD = sen α si trova di fronte all'angolo α

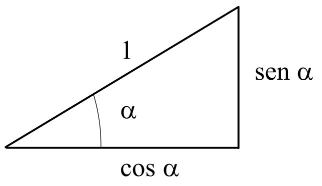
OA = cos α si trova di fianco all'angolo α

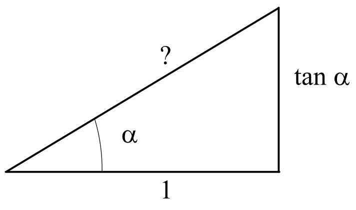
BC = tan α si trova di fronte all'angolo α ma sul triangolo esterno OBC.

Hanno una lunghezza che dipende dal valore dell'angolo α . Si dice che sono funzioni goniometriche dell'angolo α. Sono operazioni matematiche alle quali si da l'angolo e si ottiene la lunghezza di un segmento

Gli angoli OAD e OBC sono retti cioè hanno un valore di 90°, pertanto i triangoli OAD e OBC sono triangoli rettangoli.

E’ assolutamente necessario memorizzare i due triangoli:



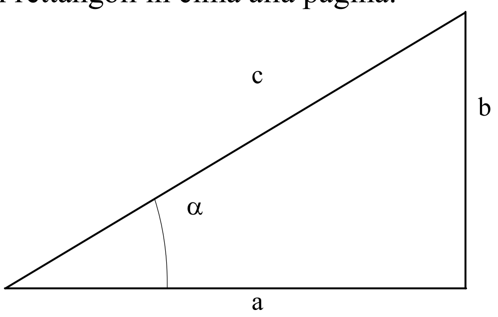


Ricordiamo ora il concetto di similitudine, in particolare di triangoli.
Due oggetti qualsiasi si dicono simili quando hanno la stessa forma ma non le stesse dimensioni. Tutte le dimensioni (le misure) dell’oggetto possono essere ricavate da quelle dell’oggetto simile moltiplicandoli per uno stesso numero.
Ad esempio, se un oggetto è grande il doppio del suo simile, tutte le misure dell’oggetto sono uguali a quelle del suo simile moltiplicate per due. Questo vuole anche dire che il rapporto fra le dimensioni dell’oggetto e quelle del suo simile è uguale al numero due.

Ci sono tre criteri per stabilire se due triangoli sono simili o meno, ma quello che ci interessa è il seguente:

Due triangoli che hanno due angoli uguali sono simili.
In particolare, se trattiamo dei triangoli rettangoli, un angolo, cioè quello di 90°, lo hanno sempre uguale, quindi possiamo affermare che:
Due triangoli rettangoli che hanno un angolo uguale (oltre quello retto) sono simili.

Consideriamo allora un qualsiasi triangolo rettangolo che abbia un angolo uguale ad a α e quindi è simile ai due triangoli rettangoli in cima alla pagina:



Poiché, come già detto, il rapporto fra le misure di oggetti simili è uguale ad uno stesso numero, possiamo scrivere tre proporzioni:

$\frac{b}{sen\alpha} = \frac{c}{1}$; $\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{c}{1}$; $\frac{b}{\tan\alpha} = \frac{a}{1}$ di cui possiamo anche utilizzare le formule inverse:

$b = c \cdot sen\alpha$; $a = c \cdot \cos\alpha$; $b = a \cdot \tan\alpha$ per ricavare l'angolo si le inverse sono:

$$\alpha = sen^{-1}\left(\frac{b}{c}\right); \qquad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a}{c}\right); \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

La funzione sen^{-1} è la funzione inversa di sen, nel senso che, la funzione sen prende l'angolo e ci fornisce la lunghezza del cateto (di fronte all' angolo) di un triangolo rettangolo che ha ipotenusa=1, la funzione sen^{-1} fa il percorso inverso, cioè prende la lunghezza del cateto di fronte all'angolo di un triangolo rettangolo con ipotenusa=1 e ci fornisce l'angolo di fronte a tale cateto.

Stesso ragionamento vale per le funzioni inverse $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$

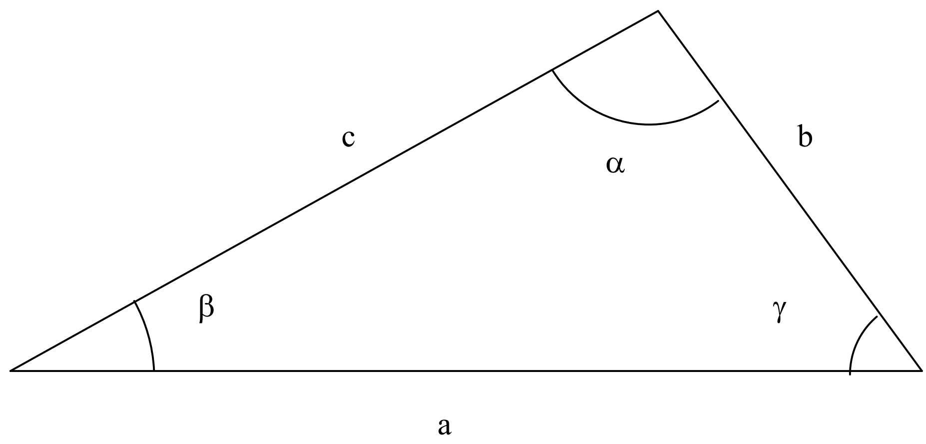
Ricordiamo poi il “Teorema di Pitagora” che costituisce una quarta relazione fondamentale:

$c^2 = a^2 + b^2$

Con queste relazioni si possono calcolare lati ed angoli incogniti dei triangoli rettangoli utilizzando lati ed angoli noti.

Nei problemi della tecnica che coinvolgono costruzioni geometriche con i triangoli, non sempre essi sono rettangoli, pertanto, vediamo con quali relazioni possono essere determinati lati ed angoli incogniti per triangoli di forma generica non necessariamente rettangoli.

Consideriamo un triangolo generico:



Tra gli angoli ed i lati i matematici hanno individuato due relazioni fondamentali:

Teorema dei seni : $\dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$

Enunciato: i rapporti sono fra ciascun lato e l'angolo opposto sono uguali

Questa scrittura canonica racchiude 3 equazioni :

$\dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\beta}$ $\qquad \dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$ $\qquad \dfrac{b}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$

Teorema di Carnot : $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$

Enunciato: Il quadrato di un lato e uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati meno il doppio del loro prodotto moltiplicato il coseno dell'angolo opposto (al lato al primo membro).

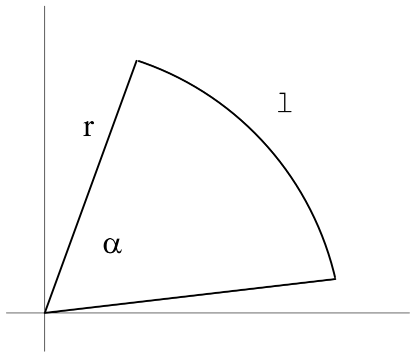
Applicando il teorema di Carnot anche agli altri due la ti si ottengono le altre due relazioni:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

Unità di misura degli angoli: il radiante

L'unità di misura degli angoli deve essere un angolo, fin dall'antichità è stato individuato il "grado sessagesimale" cioè la trecentosessantesima parte dell'angolo corrispondente ad una circonferenza cioè ad rotazione di un giro completo.

Se come unità di misura degli angoli si sceglie l'angolo che sottende un arco di circonferenza uguale al raggio dell'arco stesso, chiamiamo questa unità di misura "radiante", allora si può calcolare la lunghezza dell'arco moltiplicando il raggio direttamente per l'angolo sotteso espresso in radianti.



Come appena detto $\ell = \mathrm{r} \cdot \alpha$

Vediamo come si converte da gradi a radianti.
Sempre nell'antica Grecia, forse Euclide, si accorse che in una circonferenza il rapporto fra la lunghezza l della circonferenza stessa ed il suo diametro d è uguale sempre allo stesso numero. Questo qualunque sia la dimensione della circonferenza, grande o piccola che sia. Il suddetto numero è il cosiddetto "pigreco", indicato col simbolo π e numericamente uguale a 3,141…. E' un numero con infinite cifre decimali delle quali ne indichiamo solo tre.

Quindi $\frac{\ell}{\mathrm{d}} = 3{,}141$ ora, se al posto del diametro mettiamo il raggio "r" abbiamo $\frac{\ell}{2\,\mathrm{r}} = 3{,}141$ da cui possiamo ricavare $\ell = r \cdot 2 \cdot 3{,}141$.

Questa relazione ci indica che l'angolo sotteso dall'intera circonferenza, cioè 360° vale 2 π radianti
Quindi:

360° = 2 π rad dividendo primo e secondo membro per due si ha: 180° = π rad

Se da questa relazione vogliamo il grado sessagesimale in funzione del radiante dividiamo primo e secondo membro per 180 ottenendo:

$$1° = \frac{3{,}141}{180}\mathrm{rad}$$

Se vogliamo il radiante in funzione del grado dividiamo primo e secondo membro per 3,141 ottenendo:

$$1\,\mathrm{rad} = \left(\frac{180}{3{,}141}\right)^{\mathrm{o}}$$